حاصل الضرب الديكارتى والعلاقات والدوال ودوال كثيرات الحدود

مقدمة

الزوج المرتب

يسمى (م ، ب) بالزوج المرتب كما يسمى م بالمسقط الأول أو المسقط السينى وتسمى ب بالمسقط الثانى او المسقط الصادى

ملاحظات على الزوج المرتب :

١- (م ، ب) ≠ (ب ، م) لأنه زوج مرتب
٢- (م ، ب) ≠ { م ، ب } ≠ [م ، ب] لأنها عناصر مجموعة وفترة
٣- يمكن أن يكون الزوج المرتب (م ، م) تكرار العناصر فى الزوج المرتب ولكن لا يسمح بالتكرار فى المجموعة

تساوى زجين مرتبين

يقال أن الزوجين المرتبين متساويين إذا كان المسقط السينى للزوج الأول = المسقط الأول فى الزوج المرتب الثانى وكذلك بالنسبة للمسقط الصادى أى أن :

إذا كان (م ، ب) = (ل ، ه)
⟸ م = ل ، ب = ه

أمثلة على تساوى زوجين مرتبين

مثال ١

أوجد قيمتى س ، ص إذا كان
(س – ١ ، ص^{٥}) = (١ ، ٣٢)

الحل

س – ١ = ١ ⟸ س = ١ + ١ = ٢
ص^{٥} = ٣٢ ⟸ ص^{٥} = ٢^{٥} ⟸ ص = ٢

مثال ٢

أوجد قيمتى س ، ص إذا كان
(س ، ص^{٢}) = (ص+١ ، ٩)

الحل

☹ ص^{٢} = ٩ ⟸ ص = $\sqrt{٩}$ = ± ٣
☹ س = ص + ١
∴ عندما ص = ٣ ⟸ س = ٣ + ١ = ٤
∴ عندما ص = - ٣ ⟸ س = - ٣ + ١ = - ٢

تداريب

أوجد قيم س ، ص فى كلا مما يأتى

(١) (س – ٢ ، ١٦) = (٢ ، ص^{٢})

....
....
....
....
....
....

(٢) (س^{٢} – ١ ، ٢ص -٣) = (٣ ، ١)

....
....
....
....
....
....

(٣) (س^{٢} - ٢ ، ٢ص) = (ص ، $\sqrt{٦٤}$)

....
....
....
....
....
....

(٤) (٣٢ ، س+ص) = (ص^{٥} ، ٤)

....
....
....
....
....
....

حاصل الضرب الديكارتي

[١] للمجموعات المنتهية وتمثيله البيانى

قاعدة١

إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين من العناصر فإن :

س × ص = { (ﺃ ، ب) : ﺃ ∈ س ، ب ∈ ص }

ويقال لـ س × ص بأنه حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين س ، ص وهو :

مجموعة الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر ينتمى للمجموعة س ومسقطها الثانى عنصر ينتمى للمجموعة ص

⟸ نلاحظ أن المجموعة ص×س لها نفس القاعدة

مثال ١

إذا كان س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٥ ، ٧ }

أوجد : ١) س × ص ٢) س × ص

الحل

١) س × ص ={ ١ ، ٢ ، ٣ } × { ٥ ، ٧ }
= { (١ ، ٥) ، (١ ، ٧) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧) }

٢) س × ص = { (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٧ ، ١) ، (٧ ، ٢) ، (٧ ، ٣) }

قاعدة٢:

إذا كانت س مجموعة غير خاليه فإن حاصل الضرب الديكارتى

س × س هو مجموعة من الأزواج المرتبة التى مسقطيها الأول و الثانى ينتميان إلى المجموعة س

ونلاحظ أن : س × س = س^{٢} تقرأ س إثنين

س × س = س^{٢} = { (ﺃ ، ب) : ﺃ ، ب ∈ س }

مثال ٢

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص ={ ١ ، ٧ }

أوجد :

١) س^{٢} ٢) ص^{٢} ٣) س ×ص

الحل

(١) س^{٢} = { (١ ،١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣)، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }

(٢) ص^{٢} ={(١ ، ١) ،(١ ، ٧)،(٧ ، ١) ، (٧ ، ٧) }

(٣) س × ص = {

تمثيل حاصل الضرب الديكارتى

حاصل الضرب الديكارتى يتم تمثيلة بمخططين إحداهما بيانى و الأخر سهمى

مثال ٣

إذا كانت س = { ١ ، ٥ ، ٧ } ، ص ={ ١ ، ب }

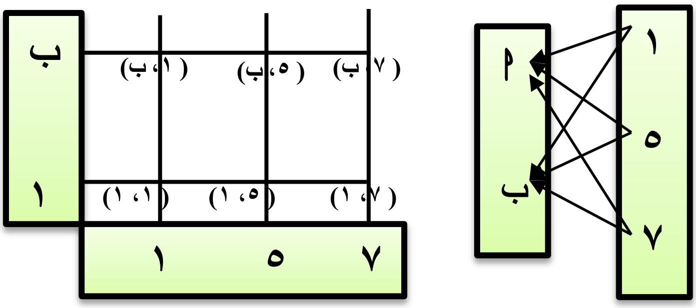
أوجد :

١) س ×ص ٢) ص ×س
٣) س^{٢} ٤) ص^{٢}

ومثل الناتج بمخط سهمى و أخر بيانى

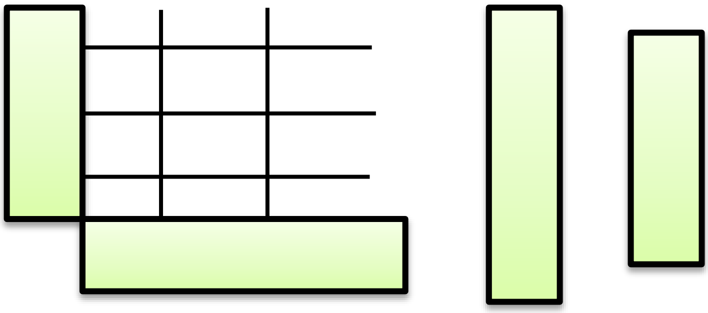
الحل

١) س×ص = {(١،١)، (١، ب)، (٥، ١)، (٥، ب)، (٧، ١)، (٧، ب)}

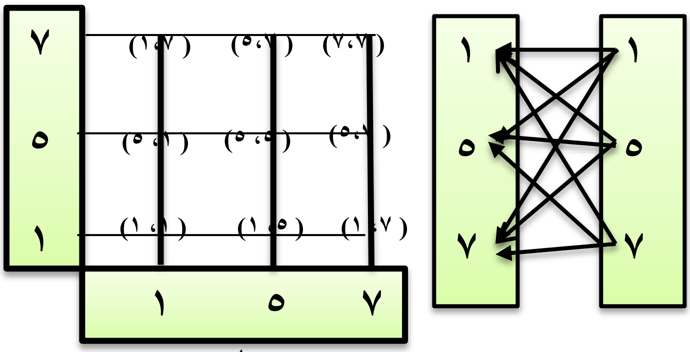


سهمى بيانى

٢) متروك للطالب

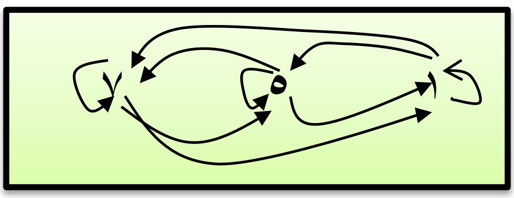


٣) س^{٢} = {(١،١)، (١، ٥)، (١، ٧)، (٥، ١)، (٥، ٥)، (٥، ٧)، (٧، ١)، (٧، ٥)، (٧، ٧)}



سهمى بيانى

حاصل الضرب الديكارتى من مجموعة إلى نفسها يمكن رسمه بمخطط سهمى كالتالى :
نختار أى شكل هندسى ونضع فيه العناصر ثم نصل الأسهم داخل الشكل الهندسى كما فى الرسم التالى



٤) متروك للطالب

ملاحظات مهمة

إذا كان ن(س) هو عدد عناصر المجموعة س وكان
ن(ص) هو عدد عناصر المجموعة ص وكان
ن(س×ص) هو عدد عناصر س × ص فإن :
ن(س×ص) = ن(س) × ن(ص)
ن(س^{٢}) = {ن(س)}^{٢}

مثال ٣

إذا كانت س = {٢، ٤، ٦} ، ص = {٣، ٧}
أوجد كلا من :
١) س×ص ٢) ص × س
٣) س^{٢} ٤) ص^{٢}
ثم أوجد عدد عناصر كل مجموعة

الحـــل

١) حاصل الضرب الديكارتى متروك للطالب

٢) عدد العناصر :
ن(س) = ٣ ن(ص) = ٢

☹ ن(س×ص) = ن(س) × ن(ص)
= ٣ × ٢ = ٦ أزواج مرتبة

☹ ن(ص×س) = ن(ص) × ن(س)
= ٢ × ٣ = ٦

☹ ن(س^{٢}) = {ن(س)}^{٢} = ٣^{٢} = ٩ أزواج مرتبة

☹ ن(ص^{٢}) = {ن(ص)}^{٢} = ٢^{٢} = ٤

مثال ٤

(١) إذا كان ن(سـ×صـ)= ١٥ وكانت
ن(سـ) = ٥ أوجد عدد عناصر المجموعة صـ

الحـل

ن(سـ×صـ) = ن(سـ) × ن(صـ)
١٥ = ٥ × ن(صـ) ⟸ ن(صـ) = ٣

(٢) إذا كانت سـ={ ٥ ، ٧ ، ٨ } وكان
ن(سـ×صـ) = ١٢
أوجد ن(صـ) ثم أوجد ن(سـ^{٢})

الحـل

ن(سـ) =٣ وذلك واضح من عدد العناصر فى المجموعة سـ
∵ ن(سـ×صـ) = ن(سـ) × ن(صـ)
١٢ = ٣ × ن(صـ) ⟸ ن(صـ) = ٤ عناصر
ن(سـ^{٢}) = { ن(سـ)}^{٢} = ٣^{٢} = ٩

(٣) إذا كانت ن(سـ^{٢}) = ١٦ وكان
صـ = { ٣ ، ٧ ، ١ }
أوجد ن(سـ×صـ)

الحـل

ن(سـ×صـ) = ن(سـ) × ن(صـ)
ومن الملاحظ أن :
ن(صـ) = ٣
ن(سـ^{٢})= ١٦
⟸ ن(سـ) = $\sqrt{}$ ن(سـ^{٢})= $\sqrt{١٦}$ = ٤

∴ ن(سـ×صـ) = ن(صـ)×ن(صـ)
= ٣ × ٤ = ١٢ زوج مرتب

ملاحظات مهمة

إذا كان (أ ، ب) ∈ سـ×صـ فإن :
أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ

مثال ٥

إذا كانت
سـ×صـ = { (٢، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٣)،
(٣ ، ٥) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٥) }
أوجد كلا من :
١) سـ ٢) صـ ٣) صـ × سـ

الحـل

سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ،
صـ = { ٣ ، ٥ }
صـ × سـ = {
}

[٢] للمجموعات الغير منتهية وتمثيلة البيانى

يتمثل ذلك فى حاصل الضرب الديكارتى لأنظمة الأعداد مثل الأعداد الطبيعية أو الصحيحة أو النسبية أو الحقيقية

أولا ط × ط

يتمثل فى محورين إحداهما أفقى والأخر رأسى ويسمى الأفقى بمحور السينات ويسمى الرأسى بمحور الصادات وكل محور مرقم من ٠ إلى ∞ كما بالشكل التالى :

حدد الأزواج المرتبة الأتيه:

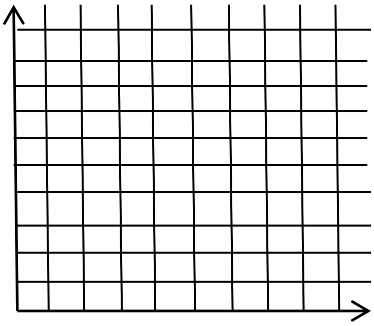
ا(١ ، ٢)

ب(٣ ، ٥)

جـ(٢ ، ٤)

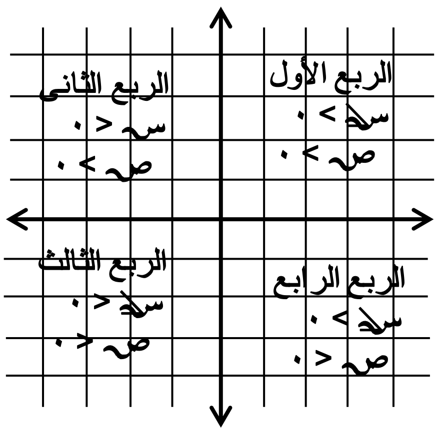
ء(١ ، ٠)

هـ(٠ ، ٣)



ثانيا ص × ص

يتمثل ايضا فى محورين إحداهما أفقى والأخر رأسى ويسمى الأفقى بمحور السينات ويسمى الرأسى بمحور الصادات وكل محور مرقم من – ∞ إلى ∞ ومتقاطعان فى نقطة واحدة تسمى نقطة الأصل و (٠ ، ٠) كما بالشكل التالى :



يسمى هذا الشكل بالشبكة التربيعية ونلاحظ عليها الأتى :

مقسمة إلى ٤ أرباع وترتيبها يبدأ فى عكس حركة عقارب الساعة

الربع الأول

مسقطى أى زوج مرتب فى الربع الأول موجبان أى أن

س > ٠ ، ص > ٠ ⟸ (٢ ، ٣)

الربع الثانى

المسقط السينى سالب والمسقط الصادى موجب أى أن :

س < ٠ ، ص > ٠ ⟸ (-٣ ، ٤)

الربع الثالث

مسقطى أى زوج مرتب فى الربع الثالث يكونان سالبان أى أن :

س < ٠ ، ص < ٠ ⟸ (–٢ ، -٥)

الربع الرابع

المسقط السينى موجب والمسقط الصادى سالب أى أن :

س > ٠ ، ص < ٠ ⟸ (٣ ، -٤)

ملاحظات مهمة

١) كل زوج مرتب يمثل بنقطة على الشبكة التربيعية

٣) المحور السينى أو الصادى يتكون من جزئين إحداهما الجزء الموجب والأخر الجزء السالب

٣) أى نقطة تقع على المحور السينى فإن مسقطها الصادى يكون صفرا وتكون النقطة على محور السينات :

☹ الموجب ⟸ إذا كان المسقط الأول موجب

⟸ (٢ ، ٠)

☹ السالب ⟸ إذا كان المسقط الأول سالب

⟸ (-٣ ، ٠)

٤) أى نقطة تقع على المحور الصادى فإن مسقطها السينى يكون صفرا وتكون النقطة على محور الصادات :

☹ الموجب ⟸ إذا كان المسقط الأول موجب ⟸ (٠ ، ٢)

☹ السالب ⟸ إذا كان المسقط الأول سالب ⟸ (٠ ، -٣)

٥) النقطة (ل ، م)

☹ تبعد عن المحور س بمقدار المسقط الصادي = | م |

☹ تبعد عن المحور ص بمقدار المسقط السيني = | ل |

مثال ١

إذا كان النقطة (س – ١ ، ٣) تقع على المحور الصادى أوجد قيمة س

الحل

أى نقطة تقع على المحور الصادى يكون مسقطها السينى صفر

∴ س – ١ = ٠ ⟸ س = ١

مثال ٢

إذا كانت النقطة (س – ١ ، س – ٢) تقع على المحور السينى أوجد قيمة س وكذلك أوجد المسقط الصادى

الحل

[٣] للفترات

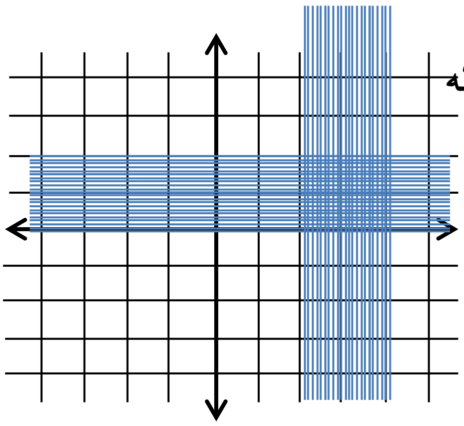
حاصل الضرب الديكارتى لا يمكن تمثيله بمخطط سهمى ولكن يمكن تمثيله بمخطط بيانى

مثال ٣

مثل بيانيا حاصل الضرب الديكارتى [٢، ٤] × [٠، ٢]

الحل

نواتج حاصل الضرب الديكارتى هى المنطقة المظللة من الفترتين



ملحوظة مهمة :

حاصل الضرب ص×ص ، ح × ح له نفس الشبكة التربيعية ولكن مع إختلاف الأعداد فمثلا (٢,٢ ، ١,٥) ∉ ص×ص ولكنه ∈ ح×ح وهكذا

العلاقات والدوال

أولا العلاقة

حاصل الضرب الديكارتى من مجموعة س مثلا إلى محموعة ص هو إرتباط كل عناصر المجموعة س بكل عناصر المجموعة ص ولكن إذا حجمنا تلك الإرتباطات بأن حددنا قاعدة للإرتباط ولتكن أن كل عنصر يرتبط بالأكبر منه نجد أن هناك علاقة بين بعض عناصر المجموعة س وبعض أو كل عناصر المجموعة ص ومن هنا نظهر معنى العلاقة

العلاقة من المجموعة س إلى ص :

هى رابط معين (قاعدة) تربط بعض أو كل عناصر المجموعة س ببعض أو كل عناصر المجموعة ص

بيان العلاقة :

هو مجموعة من الأزواج المرتبة التى تحددها العلاقة وهو جزء من حاصل الضرب الديكارتى للمجموعتين فالمسقط الأول فى هذه الأزواج المرتبة يبتمى للمجموعة الأولى و المسقط الثانى ينتمى للمجموعة الثانية

ملاحظات مهمة :

أى حاصل ضرب ديكارتى أو مجموعة جزئية منه لمجموعتين يمثل علاقة من المجموعة الأولى إلى الثانية

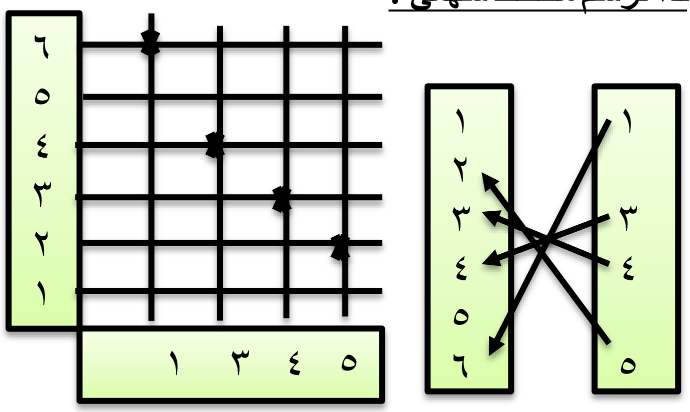
مثال ١

إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٧
أكتب بيان العلاقة ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى

الحل

عناصر المجموعة س ترتبط مع عناصر المجموعة ص طبقا للقاعدة أ + ب =٧ أى مجموع العددين المرتبطين = ٧

لذا نرسم مخطط سهمى :



سهمى بيانى

بيان ع = { (١، ٦) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢) }

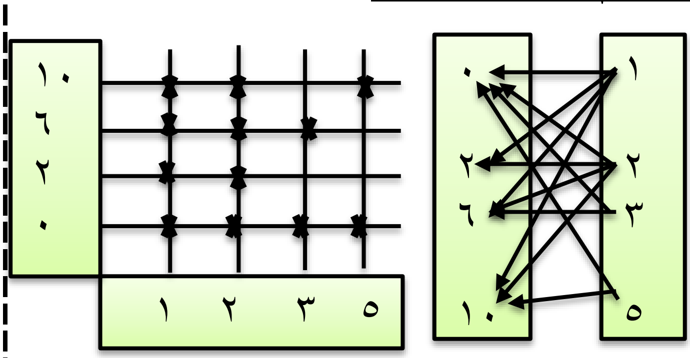
مثال ٢

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } وكانت ص = { ٠ ، ٢ ، ٦ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص بحيث أ ع ب تعنى أن (أ تقسم ب)
أكتب بيان ع ومثلها بمخططين إحداهما سهمى و الأخر بيانى

الحل

أ تقسم ب تعنى أن ⟸ ب تقبل القسمة على أ
أى نبحث فى المجموعة ص عن العدد الذى يقبل القسمة على العنصر الموجود فى المموعة س

لذا نرسم المخطط السهمى :



بيان ع = { (١،٠) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٦) ، (١ ، ١٠) ، (٢ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٦) ، (٢ ، ١٠) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠) }

تدريب ١

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ،
صـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ } وكانت ع علاقة
من سـ إلى صـ حيث ﺃ ع ب تعنى أن $ﺃ^٢$ = ب
∀ ﺃ ∈ سـ ، ب ∈ صـ أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى

الحل

بيان ع =

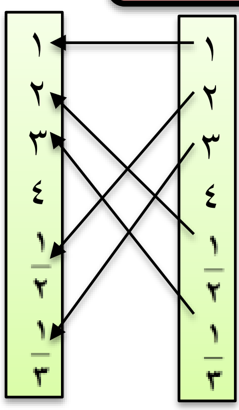
ملحوظة مهمة

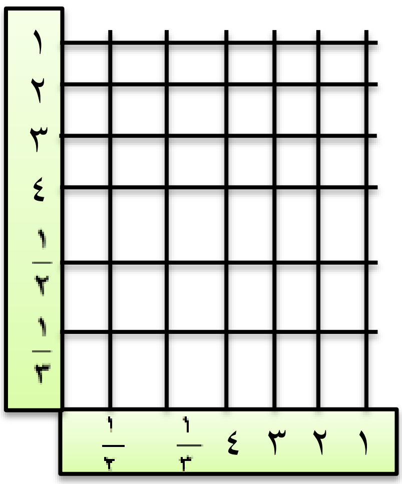
إذا كانت ع علاقة من سـ إلى سـ : أى من سـ إلى نفسها فإنه يطلق على هذه العلاقة أنها علاقة على نفسها

مثال ٣

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ } وكانت ع علاقة على س بحيث ﺃ ع ب تعنى أن ﺃ × ب = ١
أكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمى واخر بيانى

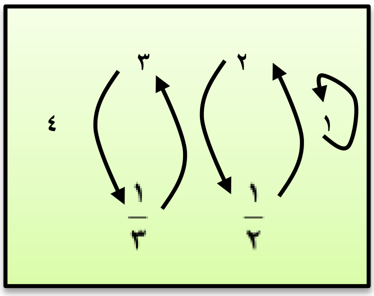
الحل





بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، $\frac{١}{٣}$) ،
($\frac{١}{٢}$ ، ٢) ، ($\frac{١}{٣}$ ، ٣) }

يمكن تمثيل العلاقة السابقة بطريقة أخرى وذلك بأن نختار شكل هندسى واحد معين ثم نضع عناصر المجموعة سـ فيها كالتالى :
وذلك لأن العلاقة هنا على مجموعة واحدة فيكون الشكل الهندسى الممثل لها شكل هندسى واحد



تدريب ٢

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ } وكانت ع علاقة على سـ بحيث أن ﺃ ع ب تعنى أن ﺃ ضعف ب
∀ ﺃ ، ب ∈ سـ
أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى

الحل

بيان ع =

ملاحظات مهمة

(١) إذا كان معنى العلاقة أحد الأتى :
☹ ﺃ عامل من عوامل ب ☹ ﺃ تقسم ب ☹ ب مضاعف ﺃ
فهذا يعنى ان ب تقبل القسمة على ﺃ

(٢) ﺃ × ب = ١ تعنى أن ﺃ معكوس ضربى لـ ب

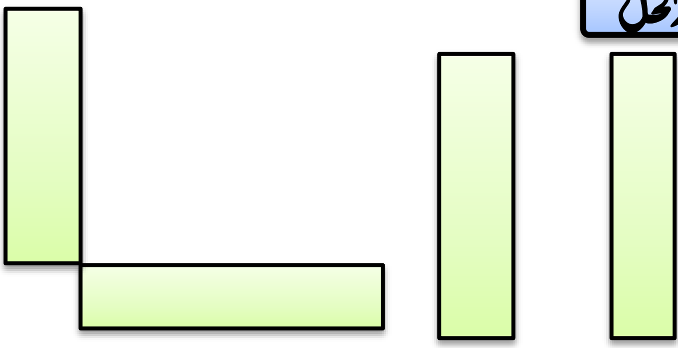
(٣) ﺃ + ب = صفر تعنى أن ﺃ معكوس جمعى لـ ب

(٤) إذا كان (٣ ، ٥) ∈ بيان العلاقة فإن يمكن التعبير عن الزوج المرتب بأنه ينتمى لبيان العلاقة
كالتالى ⟸ ٣ ع ٥

تدريب ٣

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ } وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعنى أن (أ مضاعف ب) ∀ أ ، ب ∈ س
أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى

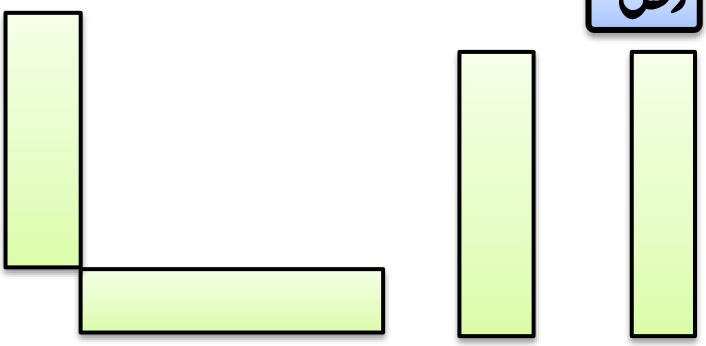
الحل



تدريب ٤

إذا كانت س = { ٢ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن (أ تقسم ب)
أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى

الحل



تدريب ٥

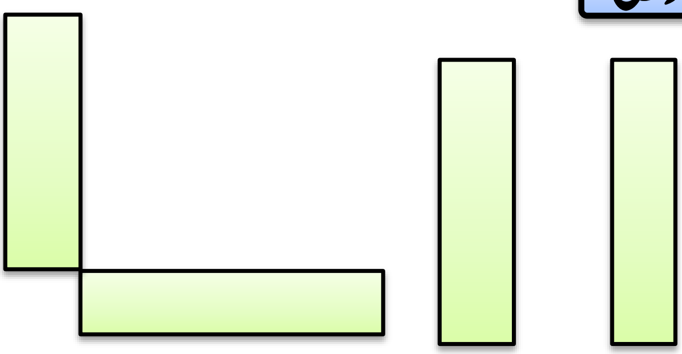
إذا كانت س = { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ } ، ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن : أ ≥ ب أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى واخر بيانى

الحل

تدريب ٦

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن $أ^٢$ = ب
أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى

الحل



تدريب ٧

إذا كانت س = { ٢ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن (أ تقسم ب)
أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى

تدريب ٨

إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٧ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب < ٨
أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى

الدالة (التطبيق)

الدالة

هى علاقة تربط كل عناصر المجموعة الأولى ببعض أو كل عناصر المجموعة الثانية بحيث يظهر أى عنصر من عناصر المجموعة الأولى كمسقط أول مرة واحدة فى بيان العلاقة

ونلاحظ فى التعريف السابق ما يلى

١ـ أن عناصر المجموعة لابد وأن ترتبط جميعها

٢ـ أى عنصر من عناصر المجموعة الأولى لابد وأن يرتبط مرة واحدة فقط

٣ـ أى عنصر من عناصر المجموعة الثانية يمكن أن يكون مرتبط بأكثر من عنصر من عناصر المجموعة الأولى لعدم وذكر خلاف ذلك بالتعريف

إى ان الدالة هى علاقة ولكن لها مواصفات معينة

لذا فإن العلاقة تكون دالة فى الحالات الأتية

١ـ **كل عنصر** : من عناصر المجموعة الأولى يظهر فى بيان العلاقة كمسقط أول مرة واحدة فقط

٢ـ **فى المخطط السهمى** : كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى يخرج منه سهم واحد فقط

٣ـ **فى المخطط البيانى** : كل خط رأسى يكون عليه علامة واحدة فقط

٤ـ **فى المخطط السهمى من مجموعة لنفسها** :

كل عنصر يخرج منه سهم واحد فقط

﴿ أى نهتم بالأسهم الخارجة فقط ﴾

مثال ١

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٥ ، ٧ ، ٩ }

بين أيا من الأتى دالة أم لا مع ذكر السبب

(١) ع = { (١ ، ٧) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٥) }

الحل

العلاقة السابقة داله لأن كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى ظهر كمسقط أول مرة واحده فقط فى بيانها

(٢) ع = { (١، ٧) ، (١ ، ٩) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ٥) }

الحل

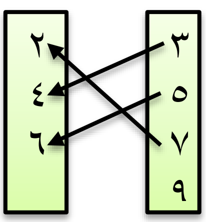
العلاقة السابقة ليست دالة وذلك لأن العنصر ١ الذى ينتمى للمجموعة الأولى ظهر كمسقط أول مرتين فى بيان العلاقة

(٣) ع = { (١ ،) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ٥) }

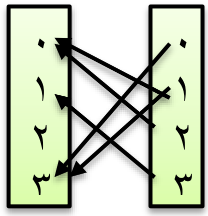
الحل

العلاقة السابقة ليست دالة وذلك لأن العنصر ٢ الذى فى المجموعة الأولى لم يرتبط بأى عنصر فى المجموعة الثانية

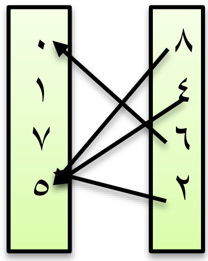
٤-



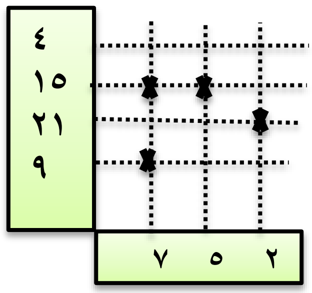
٥ـ



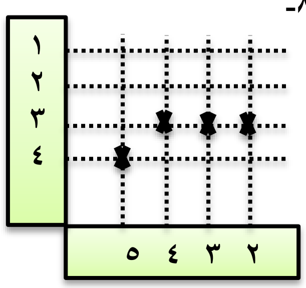
٦-



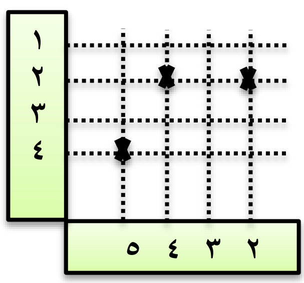
٧-



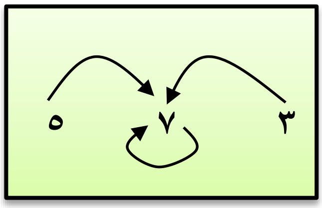
٨-



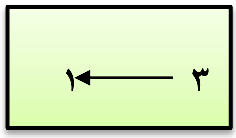
٩-



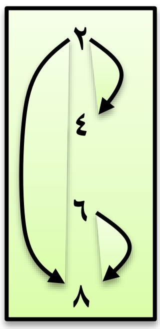
١٠-



١١-



١٢-



التعبير عن الدوال

التعبير عن الدالة

الدالة لها أكثر من صورة فى التعبير عنها مها ما يلى :
إذا كانت ى دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص
فإن :

يمكن التعبير عن الدالة كالتالى :

١) س $\xrightarrow{ى}$ ص
تقرأ س ترسم ص عن طريق القاعدة ى
لذا فإن الدوال تسمى أحيانا بالرواسم

٢) ى : س ⟵ ص
تقرأ ى دالة من س إلى ص
لذا أحيانا يطلق على الدوال إسم التطبيق

٣) ى(س) = ص
وتقرأ دالة س = ص
وتسمى ى(س) = ص بقاعدة الدالة

ملحوظة مهمة

إذا كانت ى دالة من س إلى س أى أن
ى : س ⟵ س فإنه تسمى دالة على س

المجال والمجال المقابل والمدى

إذا كانت ى دالة بحيث يتم التعبير عنها بالصيغة الأتيه
ى : س ⟵ ص أو ى(س) = ص أو ,,,,
فإن :

المجال (النطاق)

هو عناصر المجموعة الأولى س

المجال المقابل (النطاق المصاحب)

هو عناصر المجموعة الثانية ص

المدى

هو صورة المجال فى المجال المقابل

كيف نوجد المدى ؟

من بيان الدالة

كل المساقط الصادية فى بيان الدالة

المخطط السهمى

كل العناصر التى يدخل إليها أسهم

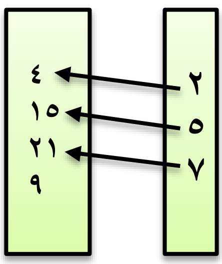
المخطط البيانى

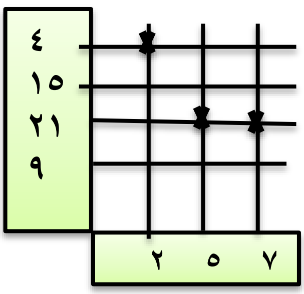
كل العناصر التى تقع على المحور الرأسى بشرط أن يكون أمامها علامة

مثال ١

إذا كانت ع علاقة من س إلى ص بحيث ٢ ع ب تعنى أن ٢ تقسم ب وكانت س = { ٢ ، ٥ ، ٧ } وكانت ص = { ٤ ، ١٥ ، ٢١ ، ٩ } أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأخر بيانى وبين هل هى دالة ام لا مع ذكر السبب وإذا كانت دالة أوجد المجال والمجال المقابل والمدى

الحل



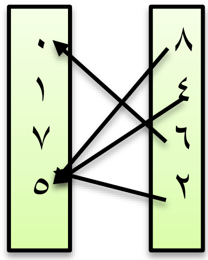


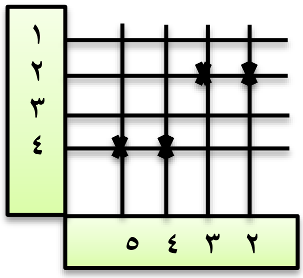
العلاقة تمثل دالة لماذا ؟

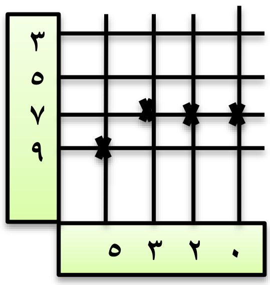
المجال ={ ٢ ، ٥ ، ٧ }
المجال المقابل = { ٤ ، ١٥ ، ٢١ ، ٩ }
المدى = { ٤ ، ١٥ ، ٢١ }

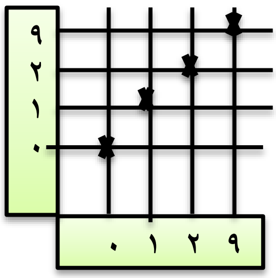
مثال ٢

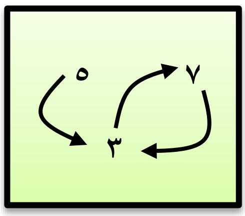
كل العلاقات الأتية تمثل دالة أوجد المدى فى كلا منها

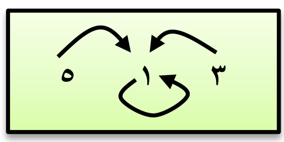












دوال كثيرات الحدود

هى كل الدوال التى فى الصورة :

د(س) = أ. + أ١ س + أ٢س^٢ + أ٣ س^٣ + ... + أن س^ن

حيث أ. ، أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، أن ∈ ح ، ن ∈ ط

نلاحظ من التعريف أن:

١) دالة كثيرة الحدود الأس فيه لابد أن يكون عدد طبيعى
٢) دالة كثيرة الحدود هى حد جبرى أو مقدار جبرى عامله الرمزى هو س
٣) يوجد عدد لا نهائى من دوال كثيرات الحدود
٤) المجال والمجال المقابل فيها هو ح (مجموعة الأعداد الحقيقة)

درجة دالة كثيرة الحدود

هى أعلى قوة فى حدودها

مثال ١

بين أيا من الدوال الأتية كثيرة حدود وأيها غير ذلك ثم أوجد الدرجة

١) ى(س) = س^٢ + ٢ س – ٣

الدالة كثيرة حدود وذلك لتوافر الشروط حيث أن كل الأسس بها أعداد طبيعية وهى مقدار جبرى

٢) ى(س) = ٣

الدالة كثيرة حدود ودرجتها صفرية

٣) ى(س) = س × (١/س + س)

الدالة ليست كثيرة حدود حيث أنه يوجد مقدارر بها قوته ليس عدد طبيعى

٤) ى(س) = س (س + ٢)^٢

ى(س) = س × (س^٢ + ٤ س + ٤) = س^٣ + ٤ س^٢ + ٤ س
كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

٥) ى(س) = س^٣ + ٢ س^-٢ - ٥ س

ليست كثيرة حدود لأن أحد أسس حدودها عدد غير طبيعى

مثال ٢

إذا كانت ى دالة كثيرة حيث ى(س) = س^٢ – س+١
أوجد قيمة كلا من

١) ى(٢) ٢) ى(٣) ٣) ى(٠)
٤) ى(-١) ٥) ى(-٢)

الحل

ى(س) = س^٢ – س + ١
١) ى(٢) = ٢^٢ – ٢ + ١ = ٤ – ٢ + ١ = ٣
٢) ى(٣) = ٣^٢ – ٣ + ١ = ٩ – ٣ + ١ = ٧
٣) ى(٠) = متروك
٤) ى(-١)= (-١)^٢ – (-١) + ١ =١ + ١ + ١ = ٣
٥) ى(-٢)=(-٢)^٢ – (-٢) +١ = ٤ +٢ +١ = ٧

ملحوظة مهمة

قبل تحديد رتبة الدالة (درجتها) لا بد من وضع الدالة فى أبسط صورة

تدريب ١

بين أيا من الأتى دالة كثيرة حدود أو لا مع ذكر السبب ثم بين درجتها إن كانت كثيرة حدود

١) $د(س) = س + \frac{١}{س}$

....

....

....

٢) $د(س) = س^{٢} (٢ + \frac{١}{س^{٢}})$

....

....

٣) $د(س) = س^{٣} + \sqrt{٢}س + ٣$

....

....

....

٤) $د(س) = س$

....

....

....

تدريب ٢

إذا كانت $د(س) = ٢س^{٢} + ب س + ج$ وكانت $د(س) =$ صفر عندما $س \in \{ ٠ ، ١ \}$ فأوجد قيمة كلا من ب ، ج

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٣

١) إذا كانت $(٠ ، ١ -) \in$ بيان الدالة د حيث $د(س) = م س + ٢$ أوجد قيمة م

....

....

....

....

....

....

....

٢) إذا كان $(٢ ، ٢) \in$ بيان الدالة د حيث $د(س) = ٢ س + ٣$ أوجد قيمة ٢

....

....

....

....

....

....

....

دوال كثيرات الحدود

هى أى دالة فى الصورة

د(س) = أ + ب س + جـ س^٢ + د س^٣ + هـ س^٤ +,,,

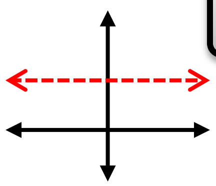
وبذلك تنقسم إلى :

الدالة الثابتة

وهى إحدى أنواع دوال كثيرات الحدود وصورتها العامة

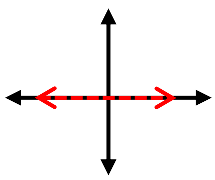
د(س) = ك حيث ك ∈ ح وهى تمثل بخط مستقيم يوازى محور السينات ويرسم :

☹ أعلى محور السينات



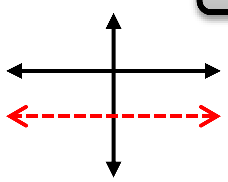
إذا كانت ك > ٠ (عدد موجب)

☹ منطبقا على محور السينات



إذا كانت ك = ٠

☹ أسفل محور السينات



إذا كانت ك < ٠ (عدد سالب)

القاعدة

إذا كانت د (س) = ك فإنة مهما تغيرت س فإن الدالة = ك أى أن :

د(١) = ك ، د (٢) = ك ، د(٠) = ك

د(٥) = ك

مثال ١

إذا كانت د (س) = ٥ أوجد

د (٢) + د (-٢) = ٥ + ٥ = ١٠

د (س) + د (٩) + د (٠) = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥

مثال ٢

مثل بيانيا الدوال الثابتة الأتية :

١) د(س) = ٣ ٢) د(س) = -٤ ٣) د(س) = ٠

الحل

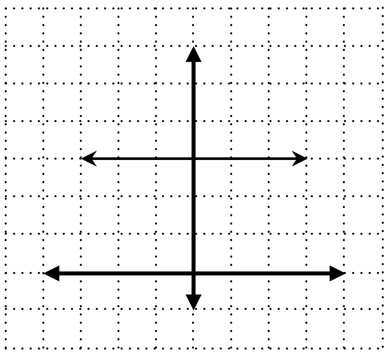
١) د(س) = ٣

أوجد :

د(٢) =

د(-١) =

د(٠) =

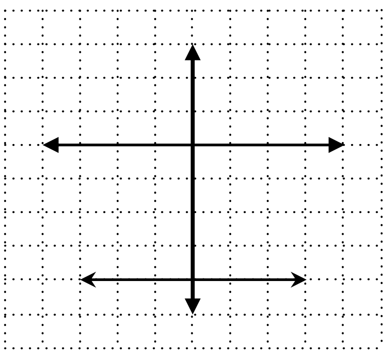


٢) د(س) = -٤

أوجد :

د(١)+د(٣) =

د(٠)+د(-١) =

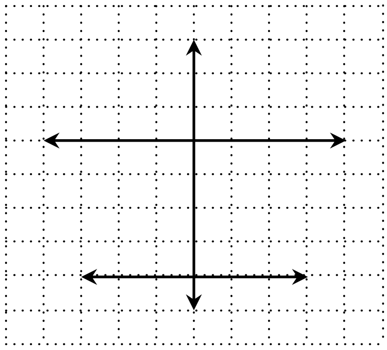


٣) د(س) = ٠

أوجد :

د(٢) =

د(١)+د(٠)=



الدالة الخطية

هى دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى صورتها العامة

د(س) = م س + ب

وهى تمثل بخط مستقيم لا يوازى المحور س ولا يوازى المحور ص ولكن يمكن ان يمر بنقطة الأصل وهذا المستقيم لة المواصفات الأتية :

☹ ميلة = م

☹ يقطع محور الصادات عند (٠ ، ب)

☹ ويقطع محور السينات عند ($\frac{\text{-ب}}{\text{م}}$ ، ٠)

☹ يمر بنقطة الأصل عندما ب = ٠

حالة خاصة:

إذا كانت الدالة الخطية فيها م = ± ١ ، ب = ٠

فإن الدالة تكون على الصورة ⟸ د(س) = ± س

وهذه الدالة تسمى دالة التطبيق لأنها تقسم الشبكة التربيعية إلى قسمين متطابقين

كيفية تمثيل الدالة الخطية على الشبكة التربيعية:

١) لتمثيلها نوجد الجزء المقطوع من المحور ص

وذلك بوضع س = ٠

٢) ونوجد الجزء المقطوع من المحور س

وذلك بوضع ص = ٠

٣) من الممكن أن نوجد زوج مرتب أخر للتأكيد

مثال ٢

مثل الدوال الأتية على الشبكة التربيعية :

١) د(س) = ٢ س + ٢ ٢) د(س) = ٢ س – ٦

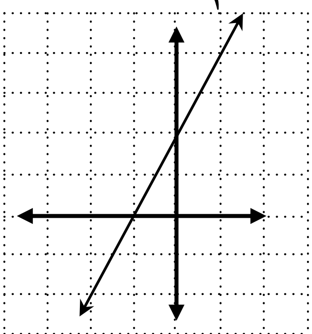
٣) د(س) = -٣س + ٦ ٤) د(س) = -٢ س

الحل

(١) د(س) = ٢ س + ٢

١- عند س = ٠ ⟸ ص = ٢

٢- عند ص = ٠ ⟸ س = $\frac{-٢}{٢}$ = -١



(٢) د(س) = ٢ س – ٦

إما نوجد الجزء المقطوع من المحور س والجزء المقطوع من المحور ص كاتالى :

١- عند س = ٠ ⟸ ص = - ٦

٢- عند ص = ٠ ⟸ س = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

طريقة أخرى :

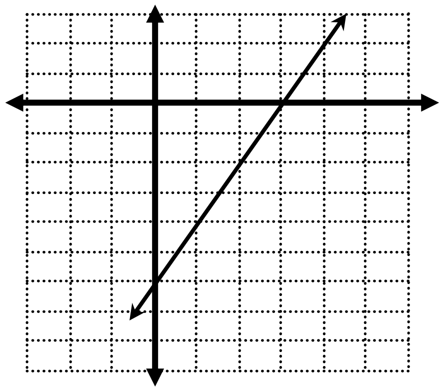
وإما نكون جدول بسيط لها

☹ عند س = ٠ ص= ٢ × ٠ ـ ٦ =٠ ـ ٦ = ـ٦

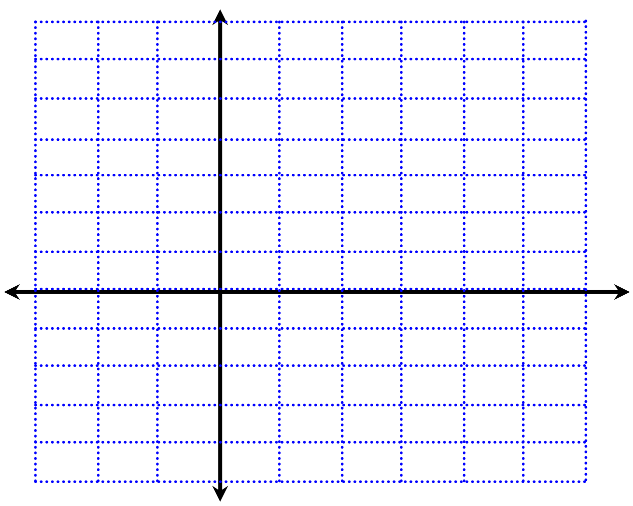
☹ عند س = ١ ص= ٢ × ١ ـ ٦ = ٢ ـ ٦ = ـ ٤

☹ عند س = ٢ ص = ٢ × ٢ ـ ٦ = ٤ ـ ٦ = ـ ٢

س	٠	١	٢
د(س) = ص	ـ٦	ـ٤	ـ ٢



٣) د(س) = ـ٣س + ٦



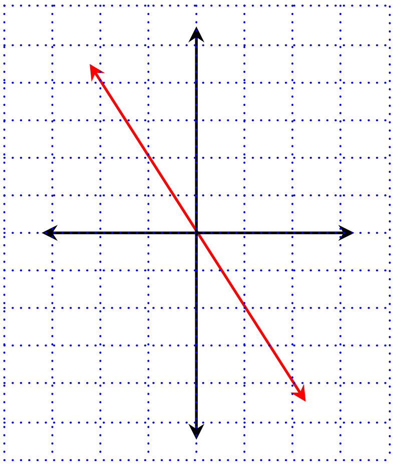
٤) د(س) = ـ ٢ س

الدالة تمثل بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

لذا نوجد نقطة أخرى وذلك بوضع س = أى عدد

عندما س = ١ ⟸ ص = ـ ٢ × ١ = ـ ٢ (١ ، ـ ٢)

∴ النقط التى تمر بها الدالة (٠، ٠) ، (١ ، ـ ٢)



ملحوظات هامة :

١) إذا كان معامل س كسر يفضل إختيار أعداد تقبل القسمة على المقام للتسهيل

٢) إذا كان معامل س موجب فإن المستقيم يكون كما بالمثال ٢ وإذا كان معامل س سالب فإن المستقيم يكون شكله العام كما بالمثال ٤

الدالة التربيعية
﴿ دالة القطع المكافئ ﴾

هى دالة صورتها العامة :

د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

وهذه الدالة تمثل بفرعى منحنى متقاطعان فى نقطة تسمى نقطة رأس المنحنى وإحداثياتها هى ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د($\frac{-ب}{٢أ}$))

☹ المسقط السينى لرأس المنحنى س = $\frac{-ب}{٢أ}$

☹ المسقط الصادى لرأس المنحنى ص = د($\frac{-ب}{٢أ}$)

(نعوض عن قيمة س فى الدالة)

والدالة التربيعية لها الخصائص التالية

١) رأس المنحنى كما سبق ذكره (ل ، م) هو نقطة إلتقاء فرعي المنحنى

٢) المسقط الصادى لرأس المنحنى يمثل القيمة العظمى أو الصغرى للدالة = م

٣) محور التماثل للمنحنى هو المستقيم س = ل

٤) إذا كان أ عدد موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى ويكون للمنحنى قيمة صغرى هى ص = م

٥) إذا كان أ عدد سالب فإن المنحنى مفتوح لأسفل ويكون للمنحنى قيمة عظمى وهى ص = م

مثال ١

أدرس الدالتين على الفترة [-٣ ، ٣]:

١) د(س) = س^{٢} ٢) د(س) = - س^{٢}

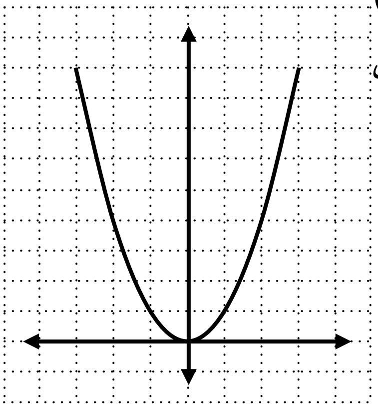
الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

١) رأس المنحنى (٠ ، ٠)

٢- المنحنى له قيمة صغرى وهى ص = ٠

٣- معادلة محور التماثل هو س = ٠



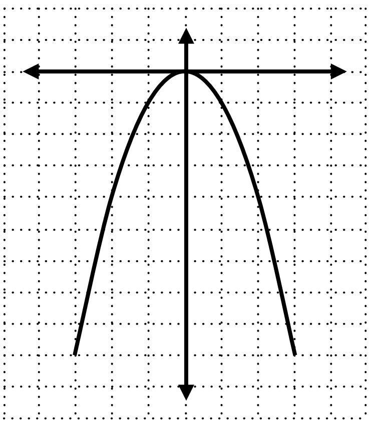
٢) د(س) = - س^{٢}

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤	-٩

١- رأس المنحنى (٠ ، ٠)

٢- المنحنى له قيمة عظمى وهى ص = ٠

٣- معادلة محور التماثل هو س = ٠



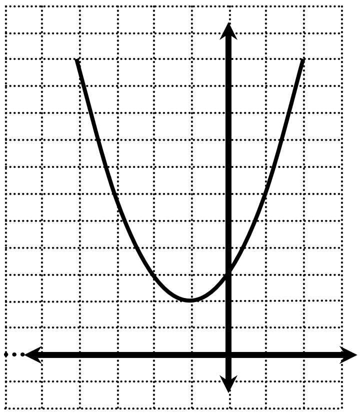
مثال ٢

ارسم الشكل البيانى لكلا من الأشكال الأتية ثم حل المعادلة ومن الرسم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى ورأس المنحنى

١) د(س) = س^{٢} + ٢ س + ٣ ∀ س ∈ [-٣ ، ١]

الحل

س	س^{٢}	٢س	٣	ص	الزوج المرتب
-٣	٩	-٦	٣	٦	(-٣ ، ٦)
-٢	٤	-٤	٣	٣	(-٢ ، ٣)
-١	١	-٢	٣	٢	(-١ ، ٢)
٠	٠	٠	٣	٣	(٠ ، ٣)
١	١	٢	٣	٦	(١ ، ٦)



من الرسم نجد أن المنحنى لا يقطع محور السينات فى أى نقطة

☹ رأس المنحنى (-١ ، ٢)

☹ الدالة لها قيمة صغرى =٢

☹ محور التماثل للدالة هو المستقيم الموازي لمحور الصادات و المار برأس المنحني ومعادلته س= - ١

☹ مجال الدالة = ح

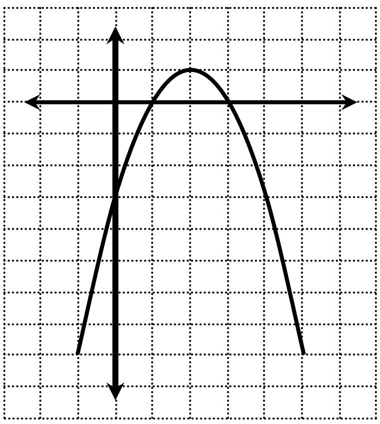
☹ مدى الدالة = [٢ ، ∞ [

٢) د(س) = ٤ س – س^{٢} -٣ ∀ س ∈ [٠ ، ٤]

الحل

د(س)= - س^{٢} + ٤ س – ٣

س	- س^{٢}	٤س	-٣	ص	الزوج المرتب
٠	٠	٠	-٣	-٣	(٠ ، -٣)
١	-١	٤	-٣	٠	(١ ، ٠)
٢	-٤	٨	-٣	١	(٢ ، ١)
٣	-٩	١٢	-٣	٠	(٣ ، ٠)
٤	-١٦	١٦	-٣	-٣	(٤ ، -٣)



من الرسم نجد أن : منحنى الدالة يقطع محور السينات فى نقطتين هما { ١ ، ٣ }

☹ رأس المنحنى (٢، ١)

☹ المنحنى له قيمة عظمى وهو ص = ١

☹ الدالة لها محور تماثل وهو س = ٢

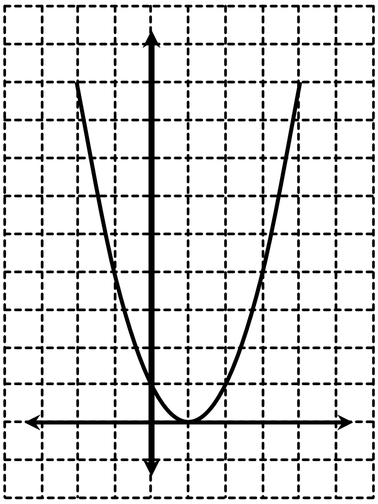
☹ مجال الدالة = ح

☹ مدى الدالة =] - ∞ ،١]

٣) د(س)= س^{٢} – ٢ س + ١ ∀ س ∈ [-٢ ، ٤]

الحل

س	س^{٢}	-٢س	١	ص	الزوج المرتب
-٢	٤	٤	١	٩	(-٢ ، ٩)
-١	١	٢	١	٤	(-١ ، ٤)
٠	٠	٠	١	١	(٠ ، ١)
١	١	-٢	١	٠	(١ ، ٠)
٢	٤	-٤	١	١	(٢ ، ١)
٣	٩	-٦	١	٤	(٣ ، ٤)
٤	١٦	-٨	١	٩	(٤ ، ٩)



من الرسم نلاحظ أن : المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة واحدة وهي { ١ }

☹ رأس المنحنى (١ ، ٠)

☹ الدالة لها قيمة صغرى وهى ص = ٠

☹ محور التماثل هو المستقيم س = ١

تدريب ١

مثل على الشبكة التربيعية الدالة

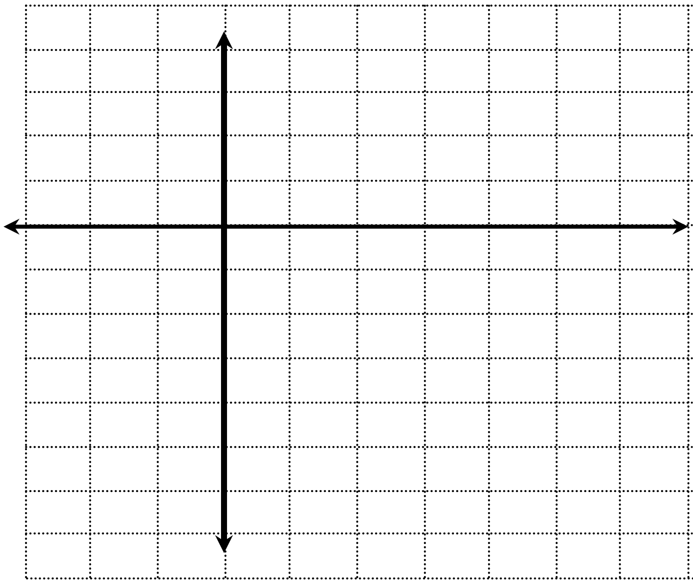
د(س) = س^{٢} - ٤ س – ٣ متخذا س ∈ [٠ ، ٤]

ومن الرسم أوجد

١) رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل

الحل

س				ص	الزوج المرتب



مثال ٤

مثل على الشبكة التربيعية الدالة

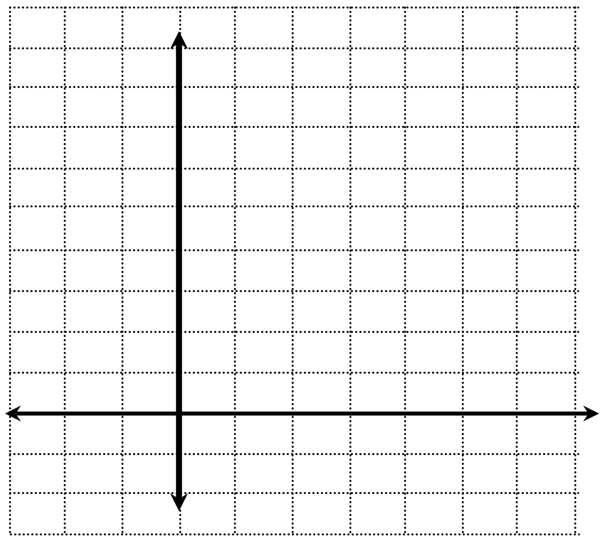
د(س) = -س^{٢} + ٣ س + ٢ ، س ∈ [-١ ، ٤]

ومن الرسم أوجد

١) القيمة العظمى للدالة ٢) محور التماثل

الحل

س	-س^{٢}	٣ س	٢	ص	الزوج المرتب
-١	-١	-٣	٢	-٢	(-١ ، -٢)
٠	٠	٠	٢	٢	(٠ ، ٢)
١	-١	٣	٢	٤	(١ ، ٤)
٢	-٤	٦	٢	٤	(٢ ، ٤)
٣	-٩	٩	٢	٢	(٣ ، ٢)
٤	-١٦	١٢	٢	-٢	(٤ ، -٢)



تدريب ٢

مثل على الشبكة التربيعية

د(س) = س^{٢} - ٦ س + ٥ حيث س ∈ [٠ ، ٦]

ومن الرسم أوجد

١) رأس المنحني ٢) معادلة محور التماثل

٣) نقطة القيمة العظمى أو الصغري للدالة

الحل

س				ص	الزوج المرتب
٠					
١					
٢					
٣					
٤					
٥					
٦					

الوحدة الثانية

النسبة والتناسب

أولاً النسبة

النسبة بين العددين ﺃ ، ب هو خارج قسمة العدد ﺃ على العدد ب ويكتب ذلك رياضيا بإحدى الصور التالية ⟸ ﺃ : ب أو $\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}}$

يسمى ﺃ البسط أو المقدم

يسمى ب المقام أو التالى

يسميا ﺃ ، ب حدى النسبة

خواص النسبة

(١) لا تتغير النسبة إذا ضرب حديها فى عدد ثابت ≠ صفر

$\frac{٣}{٤} = \frac{٣×٢}{٤×٢} = \frac{٦}{٨}$ ، $\frac{٣}{٤} = \frac{٣×٥}{٤×٥} = \frac{١٥}{٢٠}$ وهكذا ......

ويكون $\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨} = \frac{١٥}{٢٠} =$ ....

(٢) لا تتغير النسبة إذا قسم حديها على عدد ثابت ≠ صفر

$\frac{٦٠}{٤٥} = \frac{٦٠÷٣}{٤٥÷٣} = \frac{٢٠}{١٥}$ ، $\frac{٦٠}{٤٥} = \frac{٦٠÷٥}{٤٥÷٥} = \frac{١٢}{٩}$ وهكذا

ويكون $\frac{٦٠}{٤٥} = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{١٢}{٩} =$ ....

(٣) النسبة تتغير عند جمع أو طرح أى عدد لا صفر من حديها

$\frac{٢}{٣} \neq \frac{٢+١}{٣+١} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٢}{٣} \neq \frac{٢-١}{٣-١} = \frac{١}{٢}$ وهكذا ...

$\frac{٢}{٣} = \frac{٢-٠}{٣-٠} = \frac{٢}{٣}$ ، وكذلك $\frac{٢}{٣} = \frac{٢+٠}{٣+٠} = \frac{٢}{٣}$ لماذا ؟

(٤) إذا تساوت نسبتان فإنه ليس شرطا أن تتساوى حدود أحد النسبتين مع الحدود المناظرة لها فى النسبة الأخرى

☹ إذا كان $\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٥}$ فإنه ليس من الضرورى أن يكون :

ﺃ = ٣ ، ب = ٥ لأنهما نسب فمثلا إذا كانت

ﺃ =١٨ ، ب = ١٢ فإن : $\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$ أى أن :

$\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٢}$ وبالرغم من ذلك فإن ﺃ ≠ ٣ ، ب ≠ ٢

لذا فإن العدد ٣ هو نسبة ﺃ والعدد ٢ هو نسبة ب

ولكن ﺃ تساوى ٣ × مقدار ثابت وليكن م

و ب تساوى ٢× نفس المقدار الثابت م

أى أن عندما $\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٢}$ فإن : ﺃ =٣م ، ب =٥م

مثال ١

أوجد قيمة العدد الذى إذا أضيف لحدى النسبة $\frac{٥}{٦}$ لأصبحت $\frac{٦}{٥}$

الحل

نفرض أن العدد المضاف هو س

∴ $\frac{\text{س}+٥}{\text{س}+٦} = \frac{٦}{٥}$ وبضرب الطرفين و الوسطين

٥(س + ٥) = ٦ (س + ٦)

٥ س + ٢٥ = ٦ س + ٣٦

٥ س – ٦ س = ٣٦ – ٢٥

- س = - ١١ ⟸ س = ١١

مثال ٢

عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ أضيف إلى الأول ٤ وطرح من الثانى ٩ أصبحت النسبة بينهما ٣ : ٢ أوجد العددين

الحل

نفرض أن العددان هما س ، ص

س : ص = ٢ : ٣ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}$

∴ س = ٢ م ، ص = ٣ م

واضيف للاول ٤ وطرح من الثانى ٩ فأصبحت ٣ : ٢

$\frac{\text{س}+\text{٤}}{\text{ص}-\text{٩}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ (حاصل ضرب الطرفين = ...

٢ س + ٨ = ٣ ص – ٢٧

٢ س – ٣ ص = - ٢٧ – ٨ = - ٣٥

ولكن س = ٢ م ، ص = ٣ م

٢ × ٢ م – ٣ × ٣ م = - ٣٥ ⟸ ٤ م – ٩ م = - ٣٥

- ٥ م = - ٣٥ ⟸ ∴ م = $\frac{-\text{٣٥}}{-\text{٥}}$ = ٧

∴ س = ٢ م = ٢ × ٧ = ١٤

ص = ٣ م = ٣ × ٧ = ٢١

العددان هما ١٤ ، ٢١

مثال ٣

أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه لحدى النسبة ٥ : ١١ أصبحت ٣ : ٥

الحل

نفرض أن العدد هو س مربعه يكون س$^{\text{٢}}$ لذا فإن :

$\frac{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١١}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ وبالضرب التبادلى

٥ س$^{\text{٢}}$ + ٢٥ = ٣ س$^{\text{٢}}$ + ٣٣

٥ س$^{\text{٢}}$ – ٣ س$^{\text{٢}}$ = ٣٣ – ٢٥

٢ س$^{\text{٢}}$ = ٨ ⟸ س$^{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٨}}{\text{٢}}$ = ٤

∴ س$^{\text{٢}}$ = ٤ بأخذ $\sqrt{\quad}$ الطرفين

$\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}}$ = $\sqrt{\text{٤}}$ ⟸ س = ٢ أو - ٢

العدد هو + ٢ أو - ٢

تدريب١

أوجد العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة ٤٩ : ٦٩ أصبحت ٢ : ٣

الحل

....

....

....

....

....

....

....

تدريب٢

عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ وإذا أضيف الى الاول ٧ وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ أوجد العددين

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب٣

أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه لحدى النسبة ٥ : ١١ أصبحت ٣ : ٥

الحل

....

....

....

....

....

....

ثانيا التناسب

هو تساوى نسبتين أو أكثر

فإذا ساوت النسبة أ : ب النسبة جـ : ء فإنه :

☹ يقال أن أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة

☹ يكتب التناسب على الصورة

أ : ب = جـ : ء أ، $\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}$

☹ ويسمى

أ بالأول المتناسب ب بالثانى المتناسب

جـ الثالث المتناسب ء بالرابع المتناسب

☹ ويسمى

أ ، ء بالطرفين ب ، جـ بالوسطين

خواص التناسب

(١) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة فإن :

أ ، ب ، جـ ، ء $\Leftarrow$ $\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}$

(٢) وإذا كانت $\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}$ فإن :

i) $أ \times ء = ب \times جـ$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

ii) $\frac{ب}{أ}=\frac{ء}{جـ}$

مقلوب النسبة الأولى = مقلوب النسبة الثانية

iii) $أ=\frac{ب \times جـ}{ء}$ أ، $ب=\frac{أ \times ء}{جـ}$

iV) $\frac{ء}{ب}=\frac{جـ}{أ}$ ، أ $\frac{أ}{جـ}=\frac{ب}{ء}$

V) $\frac{١}{ب}=\frac{جـ}{أ \times ء}$ أ، $\frac{أ}{ب \times جـ}=\frac{١}{ء}$

Vi) $\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}=$ م حيث م مقدار ثابت ≠ صفر

ومن هذه الخاصية نستنتج أن :

☹ أ = ب م ، جـ = ء م

أو أ = جـ ك ، جـ = ء ك

حيث م ، ك ≠ صفر

Xi) $\frac{أ+جـ}{ب+ء}=\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}=$ إحدى النسب

مجموع المقدمات إلى مجموع التوالى = إحدى النسب

X) $\frac{م_1 \times أ + م_2 \times جـ}{م_1 \times ب + م_2 \times ء}=\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}=$ إحدى النسب

تعميم خواص التناسب

(١) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و كميات متناسبة فإن :

أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و $\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}=\frac{هـ}{و}=$ م

أ = ب م جـ = ء م هـ = و م

(٢) $\frac{أ+جـ+هـ}{ب+ء+و}=\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}=\frac{هـ}{و}=$ م = إحدى النسب = كل النسب

(٣) $\frac{م_1 \times أ + م_2 \times جـ + م_3 \times هـ}{م_1 \times ب + م_2 \times ء + م_3 \times و}=\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{ء}=\frac{هـ}{و}=$ م

= إحدى النسب = كل النسب

مثال ١

أوجد $\frac{س}{ص}$ فى كلا مما يأتى :

(١) ٥ س = ٣ ص (٢) $\frac{٢س + ٥ص}{٣س - ٢ص} = \frac{١}{٣}$

(٣) س^٢ + ١٢ ص^٢ = ٧ س ص

الحل

(١) ٥ س = ٣ ص ⟸ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

(٢) $\frac{٢س + ٥ص}{٣س - ٢ص} = \frac{١}{٣}$

٦ س + ١٥ ص = ٣ س – ٢ ص

٦ س – ٣ س = - ٢ ص – ١٥ ص

٣ س = - ١٧ ص

$\frac{س}{ص} = \frac{-١٧}{٣}$

(٣) س^٢ + ١٢ ص^٢ = ٧ س ص

س^٢ – ٧ س ص + ١٢ ص^٢ = ٠

(س – ٣ ص) (س – ٤ ص) = ٠

س = ٣ ص س = ٤ ص

$\frac{س}{ص} = \frac{٣}{١}$ ، أ $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{١}$

مثال ٢

إذا كان س : ص = ٢ : ٣ أوجد قيمة كلا مما يأتى

(١) $\frac{٥س - ص}{٢س + ٣ص}$ (٢) $\frac{س^٢ + ٢س ص - ص^٢}{س^٢ + س ص + ص^٢}$

الحل

∵ س : ص = ٢ : ٣ ∴ س = ٢ م ، ص = ٣ م

(١) $\frac{٥س - ص}{٢س + ٣ص} = \frac{٥×(٢م) - (٣م)}{٢×(٢م) + ٣×(٣م)}$

$= \frac{١٠م - ٣م}{٤م + ٩م} = \frac{٧م}{١١م} = \frac{٧}{١١}$

(٢) $\frac{س^٢ + ٢س ص - ص^٢}{س^٢ + س ص + ص^٢} =$

$\frac{س^٢ + ٢س ص - ص^٢}{س^٢ + س ص + ص^٢} = \frac{(٢م)^٢ + ٢(٢م)(٣م) - (٣م)^٢}{(٢م)^٢ + (٢م)(٣م) + (٣م)^٢} =$

....

....

مثال ٣

إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{س}{ع} = \frac{٢}{٥}$ وكانت

٣س + ٢ص + ع = ٤٩ أوجد قيم س ، ص ، ع

الحل

س : ص = ٣ : ٤ ، س : ع = ٢ : ٥

ص	:	س	:	ع
٤	:	٣	:	
	:	٢	:	٥
٨	:	٦	:	١٥

ص : س : ع = ٨ : ٦ : ١٥

∴ ص = ٨ م ، س = ٦ م ، ع = ١٥ م

٣ س + ٢ ص + ع = ٤٩ ⟸

٣ × ٦ م + ٢ × ٨ م + ١٥ م = ٤٩

١٨ م + ١٦ م + ١٥ م = ٤٩ ⟸ ٤٩ م = ٤٩

م = $\frac{٤٩}{٤٩}$ = ١ ∴ م = ١

∴ ص = ٨ م = ٨×١ = ٨ ، س = ٦م = ٦×١ = ٦

ع = ١٥ م = ١٥ × ١ = ١٥

مثال ٤

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ أثبت أن

(١) $\frac{أ^٢ - جـ^٢}{ب^٢ - د^٢} = \frac{أ جـ}{ب د}$ (٢) $\sqrt{\frac{٣أ^٢ - ٥جـ^٢}{٣ب^٢ - ٥د^٢}} = \frac{أ}{ب}$

الحل

(١) ∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ = م ⟸ أ = ب م ، جـ = د م

الأيمن

$$= \frac{\text{أ}^2 - \text{جـ}^2}{\text{ب}^2 - \text{ء}^2} = \frac{(\text{ب م})^2 - (\text{ء م})^2}{\text{ب}^2 - \text{ء}^2} = \frac{\text{ب}^2\text{م}^2 - \text{ء}^2\text{م}^2}{\text{ب}^2 - \text{ء}^2}$$

$$= \frac{\text{م}^2 \times (\text{ب}^2 - \text{ء}^2)}{(\text{ب}^2 - \text{ء}^2)} = \text{م}^2 \quad \text{—— (١)}$$

الأيسر

$$= \frac{\text{أ} \times \text{جـ}}{\text{ب} \times \text{ء}} = \frac{\text{ب م} \times \text{ء م}}{\text{ب} \times \text{ء}} = \frac{\text{ب ء} \times \text{م}^2}{\text{ب ء}} = \text{م}^2 \quad \text{—— (٢)}$$

من (١) ، (٢) ينتج أن الطرفان متساويان

(٢) أ = ب م ، جـ = ء م

الأيمن

$$\sqrt{\frac{\text{٣أ}^2 - \text{٥جـ}^2}{\text{٣ب}^2 - \text{٥ء}^2}} = \sqrt{\frac{\text{٣(ب م)}^2 - \text{٥(ء م)}^2}{\text{٣ب}^2 - \text{٥ء}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{٣ب}^2\text{م}^2 - \text{٥ء}^2\text{م}^2}{\text{٣ب}^2 - \text{٥ء}^2}} = \sqrt{\frac{\text{م}^2 \times (\text{٣ب}^2 - \text{٥ء}^2)}{\text{٣ب}^2 - \text{٥ء}^2}} =$$

$$= \sqrt{\text{م}^2} = \text{م} \quad \text{—— (١)}$$

الأيسر

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب}} = \text{م} \quad \text{—— (٢)}$$

من (١) ، (٢) ينتج ان الطرفان متساويان

مثال ٥

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ أثبت أن

(١) $$\frac{\text{٢أ}^4\text{ب}^2 + \text{٣أ}^2\text{هـ}^2 - \text{٥هـ}^4\text{و}}{\text{٢ب}^6 + \text{٣ب}^2\text{و}^2 - \text{٥و}^5} = \frac{\text{أ}^4}{\text{ب}^4}$$

(٢) $$\frac{\text{جـ}^2 + \text{هـ}^2}{\text{ء}^2 + \text{و}^2} = \frac{\text{٢أجـ} - \text{٥هـ}^2}{\text{٢ب ء} - \text{٥ء}^2}$$

(٣) $$\frac{\text{أ} + \text{٥جـ}}{\text{ب} + \text{٥ء}} = \frac{\text{جـ} - \text{٣هـ}}{\text{ء} - \text{٣و}}$$

الحل

$$\because \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \text{م}$$

$$\therefore \text{أ} = \text{ب م} \quad . \quad \text{جـ} = \text{ء م} \quad . \quad \text{هـ} = \text{و م}$$

(١) $$\frac{\text{٢أ}^4\text{ب}^2 + \text{٣أ}^2\text{هـ}^2 - \text{٥هـ}^4\text{و}}{\text{٢ب}^6 + \text{٣ب}^2\text{و}^2 - \text{٥و}^5} = \frac{\text{أ}^4}{\text{ب}^4}$$

الأيمن

$$= \frac{\text{٢أ}^4\text{ب}^2 + \text{٣أ}^2\text{هـ}^2 - \text{٥هـ}^4\text{و}}{\text{٢ب}^6 + \text{٣ب}^2\text{و}^2 - \text{٥و}^5}$$

$$= \frac{\text{٢(ب م)}^4\text{ب}^2 + \text{٣(ب م)}^2\text{(و م)}^2 - \text{٥(و م)}^4\text{و}}{\text{٢ب}^6 + \text{٣ب}^2\text{و}^2 - \text{٥و}^5}$$

$$= \frac{\text{٢ب}^4\text{م}^4\text{ب}^2 + \text{٣ب}^2\text{م}^2\text{و}^2\text{م}^2 - \text{٥و}^4\text{م}^4\text{و}}{\text{٢ب}^6 + \text{٣ب}^2\text{و}^2 - \text{٥و}^5}$$

$$= \frac{\text{٢ب}^6\text{م}^4 + \text{٣ب}^2\text{و}^2\text{م}^4 - \text{٥و}^5\text{م}^4}{\text{٢ب}^6 + \text{٣ب}^2\text{و}^2 - \text{٥و}^5}$$

$$= \frac{\text{م}^4(\text{٢ب}^6 + \text{٣ب}^2\text{و}^2 - \text{٥و}^5)}{\text{٢ب}^6 + \text{٣ب}^2\text{و}^2 - \text{٥و}^5} = \text{م}^4 \quad \text{—— (i)}$$

الأيسر

$$\frac{\text{أ}^4}{\text{ب}^4} = \frac{(\text{ب م})^4}{\text{ب}^4} = \frac{\text{ب}^4\text{م}^4}{\text{ب}^4} = \text{م}^4 \quad \text{—— (ii)}$$

من (i) ، (ii) ينتج أن الطرفان متساويان

(٢) $$\frac{\text{جـ}^2 + \text{هـ}^2}{\text{ء}^2 + \text{و}^2} = \frac{\text{٢أجـ} - \text{٥هـ}^2}{\text{٢ب ء} - \text{٥ء}^2}$$

الأيمن

$$\frac{\text{جـ}^2 + \text{هـ}^2}{\text{ء}^2 + \text{و}^2} = \frac{(\text{ء م})^2 + (\text{و م})^2}{\text{ء}^2 + \text{و}^2} = \frac{\text{ء}^2\text{م}^2 + \text{و}^2\text{م}^2}{\text{ء}^2 + \text{و}^2} =$$

$$= \frac{\text{م}^2(\text{ء}^2 + \text{و}^2)}{\text{ء}^2 + \text{و}^2} = \text{م}^2 \quad \text{—— (i)}$$

الأيسر

$$\frac{\text{٢أجـ} - \text{٥هـ}^2}{\text{٢ب ء} - \text{٥و}^2} = \frac{\text{٢(ب م) (ء م)} - \text{٥(و}^2\text{م}^2)}{\text{٢ب ء} - \text{٥و}^2} =$$

$$= \frac{\text{٢(ب م) (ء م)} - \text{٥(و}^2\text{م}^2)}{\text{٢ب ء} - \text{٥و}^2} = \frac{\text{٢ب ء م}^2 - \text{٥و}^2\text{م}^2}{\text{٢ب ء} - \text{٥و}^2} =$$

$$= \frac{\text{م}^2(\text{٢ب ء} - \text{٥و}^2)}{\text{٢ب ء} - \text{٥و}^2} = \text{م}^2 \quad \text{—— (ii)}$$

من (i) ، (ii) ينتج أن الطرفان متساويان

﴿٣﴾ ....

....

....

....

مثال ٦

إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ أثبت أن

(١) $\frac{٢\text{ص} - \text{ع}}{٣\text{س} - ٢\text{ص} + \text{ع}} = \frac{١}{٢}$

(٢) $\sqrt{٣\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} = ٢\text{س} + \text{ص}$

الحل

$\because \frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥} = \text{م}$ لذا يكون

$\therefore$ س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

$\therefore \frac{٢\text{ص} - \text{ع}}{٣\text{س} - ٢\text{ص} + \text{ع}} =$

$$\frac{٢(٤\text{م}) - (٥\text{م})}{٣(٣\text{م}) - ٢(٤\text{م}) + (٥\text{م})} = \frac{٨\text{م} - ٥\text{م}}{٩\text{م} - ٨\text{م} + ٥\text{م}} = \frac{٣\text{م}}{٦\text{م}} = \frac{١}{٢}$$

(٢) ....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال ٧

إذا كان $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٣} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{١٠} = \frac{\text{ع} + \text{س}}{٦}$ أثبت أن :

(١) $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{٢\text{س} + ٣\text{ص} + ٣\text{ع}} = \frac{٧}{١٩}$ (٢) $\frac{\text{س}}{٢} =$ إحدى النسب

الحل

(١) بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة :

$$= \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ع} + \text{س}}{٣ + ٥ + ٦} = \frac{٢\text{س} + ٢\text{ص} + ٢\text{ع}}{١٤}$$

$$= \frac{٢(\text{س} + \text{ص} + \text{ع})}{١٤} = \frac{(\text{س} + \text{ص} + \text{ع})}{٧}$$

$= \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{٧} =$ إحدى النسب —— ﴿i﴾

وبضرب حدى النسبة الثانية فى ٢ واجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث

$\frac{\text{س} + \text{ص}}{٣} = \frac{٢\text{ص} + ٢\text{ع}}{١٠} = \frac{\text{ع} + \text{س}}{٦}$ يكون المقدار =

$$= \frac{\text{س} + \text{ص} + ٢\text{ص} + ٢\text{ع} + \text{ع} + \text{س}}{٣ + ١٠ + ٦} = \frac{٣\text{ع} + ٣\text{ص} + ٢\text{ع}}{١٩}$$

$= \frac{٣\text{ع} + ٣\text{ص} + ٢\text{ع}}{١٩} =$ إحدى النسب —— ﴿i i﴾

من ﴿i﴾ ، ﴿i i﴾ ينتج أن :

$$\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{٧} = \frac{٣\text{ع} + ٣\text{ص} + ٢\text{ع}}{١٩}$$

ومن خواص التناسب نجد أن :

$\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{٢\text{س} + ٣\text{ص} + ٣\text{ع}} = \frac{٧}{١٩}$ هـ, ط, ث

(٢) ....

....

....

....

....

مثال ٨

إذا كان

$$\frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{ص}+\text{ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}+\text{ص}-\text{ع}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ص}+\text{ع}-\text{س}}$$

أثبت أن : $\frac{\text{أ س}+\text{ب ص}+\text{جـ ع}}{\text{س}^2+\text{ص}^2+\text{ع}^2}$ = كل النسب

الحل

بضرب حدى النسبة الأولى فى س والثانية فى ص والثالثة فى ع

$$\frac{\text{أ س}}{\text{س}^2-\text{س ص}+\text{س ع}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{س ص}+\text{ص}^2-\text{ع ص}} =$$

$$= \frac{\text{جـ ع}}{\text{ص ع}+\text{ع}^2-\text{س ع}}$$

وبجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$\frac{\text{أ س}+\text{ب ص}+\text{جـ ع}}{\text{س}^2+\text{ص}^2+\text{ع}^2}$ = إحدى النسب أو كل النسب

تدريب ١

إذا كان $\frac{\text{ب}+\text{جـ}-\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{جـ}+\text{أ}-\text{ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{أ}+\text{ب}-\text{جـ}}{\text{ع}}$ أثبت أن

$$\frac{\text{أ}}{\text{س}+\text{ص}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}+\text{ع}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ع}+\text{س}}$$

الحل

مثال ٩

إذا كان $\frac{\text{أ}}{٤} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{جـ}}{٣}$ أثبت أن $\frac{\text{أ}-\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}+\text{ب}-\text{جـ}} = \frac{١}{٣}$

الحل

$\because \frac{\text{أ}}{٤} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{جـ}}{٣} = \text{م} \Leftarrow$

أ = ٤ م ، ب = ٥ م ، جـ = ٣ م

$\therefore$ المقدار $= \frac{\text{أ}-\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}+\text{ب}-\text{جـ}} = \frac{٤\text{م}-٥\text{م}+٣\text{م}}{٤\text{م}+٥\text{م}-٣\text{م}}$

$$= \frac{٢\text{م}}{٦\text{م}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

مثال ١٠

إذا كان $\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{ل}+\text{م}} = \frac{\text{ص}+\text{ع}}{\text{م}+\text{ن}} = \frac{\text{ع}+\text{س}}{\text{ن}+\text{ل}}$ أثبت أن :

$$\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{\text{ص}-\text{س}}{\text{م}-\text{ل}}$$

الحل

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثالثة وطرح الثانية :

$$\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}+\text{س}-\text{ص}-\text{ع}}{\text{ل}+\text{م}+\text{ن}+\text{ل}-\text{م}-\text{ن}} = \frac{٢\text{س}}{٢\text{ل}} = \frac{\text{س}}{\text{ل}} \text{ - } (١)$$

بطرح مقدمات وتوالى النسبتين الثانية والثالثة :

$$\frac{\text{ص}+\text{ع}-\text{ع}-\text{س}}{\text{م}+\text{ن}-\text{ن}-\text{ل}} = \frac{\text{ص}-\text{س}}{\text{م}-\text{ل}} \text{ —— } (٢)$$

من (١) و (٢) نجد أن : $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{\text{ص}-\text{س}}{\text{م}-\text{ل}}$

تدريب ٢

إذا كان ﻫ ، ب ، جـ ، ى كميات متناسبة فأثبت أن :

(١) $\frac{\text{ﻫ جـ}}{\text{ب ى}} = \left(\frac{\text{ﻫ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{ى}}\right)^{٢}$

(٢) $\sqrt[٣]{\frac{٥\text{ﻫ}^{٣} - ٣\text{جـ}^{٣}}{٥\text{ب}^{٣} - ٣\text{ى}^{٣}}} = \frac{\text{ﻫ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{ى}}$

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٣

إذا كان $\frac{\text{ﻫ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٣} = \frac{\text{جـ}}{٤} = \frac{٢\text{ﻫ} - \text{ب} + ٥\text{جـ}}{٣\text{س}}$ أوجد قيمة س

الحل

....

....

....

....

....

تدريب ٤

إذا كان $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}}$ فأثبت أن كلا من هذه النسب يساوي ٢ عندما س + ص ≠ ٠

ثم أوجد س ، ص ، ع

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٥

إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢أ + ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب − جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢جـ − أ}}$ فأثبت أن

$$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب − جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$$

الحل

تدريب ٦

إذا كان $\frac{\text{أ + ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{ب + جـ}}{\text{٦}} = \frac{\text{جـ + أ}}{\text{٥}}$ فأثبت

$$\frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{أ}} = \text{٧}$$

الحل

تدريب ٥

إذا كان $\frac{\text{س + ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{ص + ع}}{\text{٥}} = \frac{\text{ع + س}}{\text{٨}}$

أثبت أن $\frac{\text{س + ص + ع}}{\text{س − ع}} = \text{٥}$

الحل

ثالثا التناسب المتسلسل

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل فإن :

أ ، ب ، جـ ، د ويكون $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

ومن خواص التناسب نجد أن :

أ = ب م ، ب = جـ م ، جـ = د م وبذلك نجد

☹ $\text{أ} = \text{ب م} = (\text{جـ م})\text{ م} = \text{جـ م}^2 = (\text{د م})\text{ م}^2 = \text{د م}^3$

☹ $\text{ب} = \text{جـ م} = (\text{د م})\text{ م} = \text{د م}^2$

☹ جـ = د م أى أن :

$\text{أ} = \text{د م}^3$ ، $\text{ب} = \text{د م}^2$ ، $\text{جـ} = \text{د م}$

الوسط المتناسب «الهندسى»

إذا كانت أ ، ب ، جـ متناسبة تناسبا متسلسلا فإن :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \Leftarrow \text{ب}^2 = \text{أ جـ} \quad \therefore \text{ب} = \pm\sqrt{\text{أ جـ}}$

ب تسمى الوسط الهندسى أو الوسط المتناسب لـ أ ، جـ

أ الأول المتناسب جـ الثالث المتناسب

الوسط المتناسب لأى كميتين

الوسط المتناسب لأى قيمتين هو الجذر التربيعى لحاصل ضربهما وذلك بشرط أن يكون لهما نفس الإشارة

فالوسط الهندسى لـ أ ، ب = $\pm\sqrt{\text{أ جـ}}$

تعميم

☹ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و كميات فى تناسب متسلسل فإن :

$\text{أ} = \text{و م}^5$ ، $\text{ب} = \text{و م}^4$ ، $\text{جـ} = \text{و م}^3$

$\text{د} = \text{و م}^2$ ، $\text{هـ} = \text{و م}$ حيث م مقدار ثابت لا ٠

☹ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن:

أ ، ب ، جـ : تكون فى تناسب متسلسل ويكون:

$\text{أ} = \text{جـ م}^2$ ، $\text{ب} = \text{جـ م}$

مثال ١

إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ أثبت أن :

(١) $\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$ (٢) $\frac{2\text{جـ}^2-3\text{ب}^2}{2\text{ب}^2-3\text{أ}^2} = \frac{\text{جـ}^2}{\text{ب}^2}$

(٣) $\frac{\text{أ}^2+\text{أب}+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{ب جـ}+\text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}^2-\text{ب}^2}{\text{ب}^2-\text{جـ}^2}$

(٤) $\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}{\text{أ}^{-2}+\text{ب}^{-2}+\text{جـ}^{-2}} = \text{ب}^4$

(٥) $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}^{-1}+\text{ب}^{-1}+\text{جـ}^{-1}} = \text{ب}^2$

الحل

∵ ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ ∴ أ ، ب ، جـ فى تناسب متسلسل أى أن :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$ $\text{أ} = \text{جـ م}^2$ ، $\text{ب} = \text{جـ م}$

(١) $\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

الأيمن

$\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{جـ}^2} = \frac{(\text{جـ م}^2)^2+(\text{جـ م})^2}{(\text{جـ م})^2+\text{جـ}^2} = \frac{\text{جـ}^2\text{م}^4+\text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2+\text{جـ}^2} =$

$= \frac{\text{جـ}^2\text{م}^2(\text{م}^2+1)}{\text{جـ}^2(\text{م}^2+1)} = \text{م}^2$ ______ (١)

الأيسر

$\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ م}^2}{\text{جـ}} = \text{م}^2$ ______ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الطرفان متساويان

(٢) $\frac{2\text{جـ}^2-3\text{ب}^2}{2\text{ب}^2-3\text{أ}^2} = \frac{\text{جـ}^2}{\text{ب}^2}$

الأيمن

$\frac{2\text{جـ}^2-3\text{ب}^2}{2\text{ب}^2-3\text{أ}^2} = \frac{2\text{جـ}^2-3(\text{جـ م})^2}{2(\text{جـ م})^2-3(\text{جـ م}^2)^2} =$

$= \frac{2\text{جـ}^2-3\text{جـ}^2\text{م}^2}{2\text{جـ}^2\text{م}^2-3\text{جـ}^2\text{م}^4} = \frac{\text{جـ}^2(2-3\text{م}^2)}{\text{جـ}^2\text{م}^2(2-3\text{م}^2)} = \frac{1}{\text{م}^2}$ ______ (١)

الأيسر

$$= \frac{\text{جـ}^2}{\text{ب}^2} = \frac{\text{جـ}^2}{(\text{جـ}\text{م})^2} = \frac{\text{جـ}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2} = \frac{1}{\text{م}^2} \text{ ——— } (2)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن الـ ....

$$(3)\quad \frac{\text{أ}^2 + \text{أ}\text{ب} + \text{ب}^2}{\text{ب}^2 + \text{ب}\text{جـ} + \text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}^2 - \text{جـ}^2}$$

الأيمن

$$\frac{\text{أ}^2 + \text{أ}\text{ب} + \text{ب}^2}{\text{ب}^2 + \text{ب}\text{جـ} + \text{جـ}^2} = \frac{(\text{جـ}\text{م}^2)^2 + (\text{جـ}\text{م}^2)(\text{جـ}\text{م}) + (\text{جـ}\text{م})^2}{(\text{جـ}\text{م})^2 + (\text{جـ}\text{م})\text{جـ} + \text{جـ}^2} =$$

$$= \frac{\text{جـ}^2\text{م}^4 + \text{جـ}^2\text{م}^3 + \text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2 + \text{جـ}^2\text{م} + \text{جـ}^2} =$$

$$= \frac{\text{جـ}^2\text{م}^2(\text{م}^2 + \text{م} + 1)}{\text{جـ}^2(\text{م}^2 + \text{م} + 1)} = \text{م}^2 \text{ ——— } \{1\}$$

الأيسر

$$\frac{\text{أ}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}^2 - \text{جـ}^2} = \frac{(\text{جـ}\text{م}^2)^2 - (\text{جـ}\text{م})^2}{(\text{جـ}\text{م})^2 - \text{جـ}^2} = \frac{\text{جـ}^2\text{م}^4 - \text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2 - \text{جـ}^2} =$$

$$= \frac{\text{جـ}^2\text{م}^2(\text{م}^2 - 1)}{\text{جـ}^2(\text{م}^2 - 1)} = \text{م}^2 \text{ ——— } \{2\}$$

ومن {١} ، {٢} نجد أن الطرفان متساويان

$$(4)\quad \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}{\text{أ}^{-2} + \text{ب}^{-2} + \text{جـ}^{-2}} = \text{ب}^4$$

الأيمن

$$\frac{(\text{جـ}\text{م}^2)^2 + (\text{جـ}\text{م})^2 + \text{جـ}^2}{(\text{جـ}\text{م}^2)^{-2} + (\text{جـ}\text{م})^{-2} + \text{جـ}^{-2}} = \frac{\text{جـ}^2\text{م}^4 + \text{جـ}^2\text{م}^2 + \text{جـ}^2}{\text{جـ}^{-2}\text{م}^{-4} + \text{جـ}^{-2}\text{م}^{-2} + \text{جـ}^{-2}} =$$

$$= \frac{\text{جـ}^2(\text{م}^4 + \text{م}^2 + 1)}{\text{جـ}^{-2}(\text{م}^{-4} + \text{م}^{-2} + 1)} \times \frac{\text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2} = \frac{\text{جـ}^4\text{م}^4(\text{م}^4 + \text{م}^2 + 1)}{(1 + \text{م}^2 + \text{م}^4)} =$$

$= \text{جـ}^4\text{م}^4 = (\text{جـ}\text{م})^4 = \text{ب}^4$ يساوى الأيسر

$$(5)\quad \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ}^{-1} + \text{ب}^{-1} + \text{جـ}^{-1}} = \text{ب}^2$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال ٢

أوجد العدد الذى إذا طرح من الأعداد ٣ ، ٧ ، ١٩ فإنها تكون فى تناسب متسلسل

الحل

نفرض أن العدد هو س فإن :

٣ – س ، ٧ – س ، ١٩ – س فى تناسب متسلسل

لذا فإن :

$\frac{3 - \text{س}}{7 - \text{س}} = \frac{7 - \text{س}}{19 - \text{س}}$ ⟸ وبالضرب التبادلى

$49 - 7\text{س} - 7\text{س} + \cancel{\text{س}^2} = 57 - 3\text{س} - 19\text{س} + \cancel{\text{س}^2}$

$49 - 14\text{س} = 57 - 22\text{س}$

⟸ $-14\text{س} + 22\text{س} = 57 - 49$ ⟸ $8\text{س} = 8$

∴ س = ١ ∴ العدد هو ١

مثال ٣

إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع أثبت أن

$$\frac{\text{س ع}}{\text{ص}(\text{ص}+\text{ع})} = \frac{\text{س}}{\text{س}+\text{ص}}$$

الحل

∵ ص وسطا متناسبا بين س ، ع

∴ س ، ص ، ع فى تناسب متسلسل

$$\Leftarrow \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \text{م}$$

$$\text{س} = \text{ع م}^{٢} \quad ، \quad \text{ص} = \text{ع م}$$

الايمن:

$$\frac{\text{س ع}}{\text{ص}(\text{ص}+\text{ع})} = \frac{\text{ع م}^{٢} \times \text{ع}}{\text{ع م}(\text{ع م}+\text{ع})} = \frac{\text{م} \times \text{ع}}{(\text{ع م}+\text{ع})} =$$

$$= \frac{\text{م} \times \text{ع}}{\text{ع}(\text{م}+١)} = \frac{\text{م}}{(\text{م}+١)} \text{ ——— } (١)$$

الايسر:

$$\frac{\text{س}}{\text{س}+\text{ص}} = \frac{\text{ع م}^{٢}}{\text{ع م}^{٢}+\text{ع م}} = \frac{\text{ع م}^{٢}}{\text{ع}(\text{م}^{٢}+\text{م})} = \frac{\text{م}^{٢}}{(\text{م}^{٢}+\text{م})} =$$

$$= \frac{\text{م}^{٢}}{\text{م}(\text{م}+١)} = \frac{\text{م}}{(\text{م}+١)} \text{ ——— } (٢)$$

من (١) ، (٢) الطرفان متساويان

مثال ٤

إذا كان $\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢}+\text{ج}^{٢}}{\text{ج}^{٢}}$ أثبت أن ب وسطا متناسبا بين أ ، ج

الحل

من خواص التناسب ⟸

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$\text{ب}^{٢} \times \text{ب}^{٢} + \text{ب}^{٢} \times \text{ج}^{٢} = \text{أ}^{٢} \times \text{ج}^{٢} + \text{ب}^{٢} \times \text{ج}^{٢}$$

$$\Leftarrow \text{ب}^{٤} + \text{ب}^{٢}\text{ج}^{٢} = \text{أ}^{٢}\text{ج}^{٢} + \text{ب}^{٢}\text{ج}^{٢}$$

$\Leftarrow \text{ب}^{٤} = \text{أ}^{٢}\text{ج}^{٢}$ بأخذ $\sqrt{\ }$ الطرفين

$$\sqrt{\text{ب}^{٤}} = \sqrt{\text{أ}^{٢}\text{ج}^{٢}} \Leftarrow \text{ب}^{٢} = \text{أ ج}$$

∵ $\text{ب}^{٢} = \text{أ ج}$ ∴ ب وسط متناسب بين أ ، ج

حل اخر

$$\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢}+\text{ج}^{٢}}{\text{ج}^{٢}}$$

$$\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{ج}^{٢}} + \frac{\text{ج}^{٢}}{\text{ج}^{٢}}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \cancel{١} = \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{ج}^{٢}} + \cancel{١}$$

$\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{ج}^{٢}} \Leftarrow \text{ب}^{٤} = \text{أ}^{٢}\text{ج}^{٢}$ بأخذ $\sqrt{\ }$ الطرفين

$$\sqrt{\text{ب}^{٤}} = \sqrt{\text{أ}^{٢}\text{ج}^{٢}} \Leftarrow \text{ب}^{٢} = \text{أ ج}$$

∵ $\text{ب}^{٢} = \text{أ ج}$ ∴ ب وسط متناسب بين أ ، ج

مثال ٥

أوجد

(١) الأول المتناسب للكميات ..... ، ٤ ، ٦ ، ٢

(٢) الثانى المتناسب للكميات ٦ ، ..... ، ٣ ، ٨

(٣) الثالث المتناسب للكميات أ ، أ + ب ، $\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

(٤) الوسط الهندسى للكميات ٨ ، ١٨

(٥) الأول المتناسب لـ ٦ ، ١٨

(٦) الوسط المتناسب (الهندسى) لـ ٨ ، ١٨

الحل

(١) س ، ٤ ، ٦ ، ٢ $\Leftarrow \frac{\text{س}}{٤} = \frac{٦}{٢}$

$$\text{س} = \frac{٤\times٦}{٢} = ١٢$$

(٢) ٦ ، ...... ، ٣ ، ٨ $\Leftarrow \frac{٦}{\text{س}} = \frac{٣}{٨}$

$$\text{س} = \frac{٦\times٨}{٣} = ١٦$$

(٣) أ ، أ + ب ، س ، $\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

$$\Leftarrow \frac{\text{أ}}{\text{أ}+\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢}}$$

$$\text{س} = \frac{(\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢})}{\text{أ}+\text{ب}} = \frac{\text{أ}(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})}{\text{أ}+\text{ب}} = \text{أ}(\text{أ}+\text{ب})$$

(٤) الوسط الهندسى = $\sqrt{٨ \times ١٨} = \pm \sqrt{١٤٤} = \pm ١٢$

(٥) الأول المتناسب لـ ٦ ، ١٨

س ، ٦ ، ١٨ ∴ $\frac{س}{٦} = \frac{٦}{١٨}$ ∴ س = $\frac{٦ \times ٦}{١٨} = \frac{٣٦}{١٨} = ٢$

(٦) الوسط الهندسى لـ -٨ ، ١٨ لا يمكن إيجاد الوسط الهندسى بينهما لأنهما مختلفتان فى الإشارة

مثال ٦

(١) إذا كانت ٥ م ، ٢ ص ، ٣ ب ، ٧ ص كميات متناسبة أوجد م : ب

(٢) أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ١ ، ١٣ ، ٧ ، ٣١ أصبحت متناسبة

الحل

(١) ٥ م ، ٢ص ، ٣ب ، ٧ص كميات متناسبة لذا فإن

$\frac{٥م}{٢ص} = \frac{٣ب}{٧ص} \Leftarrow \frac{٥م}{٣ب} = \frac{٢ص}{٧ص}$

$\Leftarrow \frac{م}{ب} = \frac{٢ \times ٣}{٧ \times ٥} = \frac{٦}{٣٥}$

م : ب = ٦ : ٣٥

(٢) نفرض أن العدد هو س ∴ تكون الكميات هى

١+س ، ١٣+س ، ٧ + س ، ٣١ + س ويكون

$\frac{١+س}{١٣+س} = \frac{٧+س}{٣١+س}$

وبضرب الطرفين ومساواتهما بالوسطين فإن

$٣١ + س + ٣١س + س^٢ = ٩١ + ١٣س + ٧س + س^٢$

٣٢س + ٣١ = ٢٠ س + ٩١

٣٢ س – ٢٠ س = ٩١ – ٣١ = ٦٠

١٢ س = ٦٠ $\Leftarrow$ س = $\frac{٦٠}{١٢} = ٥$

تداريب

أجب عما يأتى

(١) أوجد الثالث المتناسب للقيم ٥ ، ٤ ، ..... ، ٨

....

....

....

(٢) أوجد الرابع المتناسب للقيم ٥ ، ٢٠ ، ١ ، ......

....

....

....

(٣) أوجد الأول المتناسب للقيم ..... ، ٢١ ، ٣ ، ٩

....

....

....

(٤) أوجد الوسط المتناسب للقيمتين ٢٤ ، ٦

....

....

....

(٥) أوجد الأول المتناسب للقيم ١٠ ، ١٠٠

....

....

....

(٦) إذا كانت ٢ ، س ، ص ، ١٦ كميات فى تناسب متسلسل أوجد قيمة س ، ص

....

(٧) إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤}$ أوجد قيمة $(٤س - ٣ص + ٥)^{٢}$

....

(٨) إذا كانت $س^{٢} + ٦٤ص^{٢} = ١٦س ص$

أوجد قيمة $\frac{٢س + ٣ص}{س - ٥ص}$

....

(٩) إذا كان ﺃ : ب : ج = ٥ : ٧ : ٣ وكان ﺃ + ب = ٢٧,٦ فأوجد قيمة كل من ﺃ ، ب ، ج

....

(١٠) س ، ص ، ع أطوال أضلاع متناسبة فى مثلث وكان س + ص = ١٥ سم ، ص + ع = ٢٢,٥ فأوجد س ، ص

....

التغير

أولا التغير الطردى

لمعرفة التغير الطردى ندرس العلاقة بين مساحة المربع وطول ضلعه , المساحة م وطول الضلع ل

القانون هو م = ل^{٢}

عندما

ل=١سم ⟸ م = ١^{٢} =١ ل= ٨سم ⟸ م =٨^{٢}=٦٤

ل=٢سم ⟸ م =٢^{٢}=٤ ل= ٧سم ⟸ م =٧^{٢} =٤٩

ل=٣سم⟸ م =٤^{٢}=١٦ ل= ٦سم ⟸ م =٦^{٢} =٣٦

مما سبق قد وجدنا أن عندما يزيد طول الضلع فإنه يزداد محيط المربع و العكس عندما يقل طول الضلع يقل معها محيط المربع

☹ لذا يقال أن العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته علاقة طردية أو مساحة المربع تتغير طرديا مع طول الضلع ويعبر عن ذلك رياضيا كالتالى م $\propto$ ل

القاعدة

إذا كان المتغير ص يتغير طرديا مع المتغير س أى إذا كان :

ص $\propto$ س ⟸ ص = م س ، أ $\frac{ص}{س}$ = م

حيث م مقدار ثابت يسمى ثابت التناسب

ملحوظة هامة

☹ يقال أن ص $\propto$ س إذا وفقط إذا كان $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

حيث ص$_١$ ، ص$_٢$ قيم للمتغير ص ، س$_١$ ، س$_٢$ قيم للمتغير س

☹ المتغير ص يتناسب تناسبا طرديا مع المتغير س فى إحدى الحالات الأتية :

☹ ص = م × س ☹ $\frac{ص}{س}$ = م

ثانيا التغير العكسى

للتعرف على التغير العكسى ندرس العلاقة بين طول وعرض مستطيل ثابت المساحة ولتكن ١٢٠ سم^{٢}

طوله ل وعرضه ع ومساحته ح = ١٢٠ ثابته

القانون هو ح = ل × ع أى أن ل × ع = ١٢٠

عندما

ل=١ ∴ ع = $\frac{١٢٠}{١}$ =١٢٠ ل=٦ ∴ ع = $\frac{١٢٠}{٦}$ = ٢٠

ل=٢ ∴ ع = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠ ل=٥ ∴ ع = $\frac{١٢٠}{٥}$ = ٢٤

ل=٣ ∴ ع = $\frac{١٢٠}{٣}$ = ٤٠ ل=٤ ∴ ع = $\frac{١٢٠}{٤}$ = ٣٠

مما سبق قد وجدنا أن كلما إزدادت قيمة الطول ل تقل قيمة العرض ع وبالعكس كلما قلت قيمة الطول ل إزدادت قيمة العرض ع

لذا يطلق على العلاقة بين بعدا المستطيل الطول والعرض عند ثبوت المساحة علاقة عكسية

☹ طول المستطيل يتغير عكسيا مع عرضه ويرمز لذلك رياضيا كالتالى ل $\propto$ ع

القاعدة

إذا كان المتغير ص يتغير عكسيا مع المتغير س أى إذا كان :

ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ ⟸ ص = م × $\frac{١}{س}$

أ ، ص = $\frac{م}{س}$ ، أ ص × س = م

حيث م مقدار ثابت يسمى ثابت التناسب

ملحوظة هامة

☹ يقال أن ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ إذا وفقط إذا كان

$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

حيث ص$_١$ ، ص$_٢$ قيم للمتغير ص ، س$_١$ ، س$_٢$ قيم للمتغير س

☹ المتغير ص يتناسب عكسيا مع المتغير س فى إحدى الأتى

☹ ص × س = م ☹ ص = $\frac{م}{س}$

ملاحظات مهمة

(١)ليس شرطا أن يتناسب المتغير ص طرديا مع المتغير س إذا زادت ص بزيادة س أو قلت ص بنقص س ولكن أصطلح على أن ص تتناسب طرديا مع س عندما يكون

☹ ص = م × س ☹ $\frac{ص}{س}$ = م

مهما كانت قيمة م

(٢)ليس شرطا أن يتناسب المتغير ص عكسيا مع المتغير س إذا زادت ص بنقص س أو إذا قلت ص بزيادة س ولكن أصطلح على أن ص تتناسب عكسيا مع س عندما يكون :

☹ ص × س = م ☹ ص = $\frac{م}{س}$

وذلك لأنه إذا كانت م عدد سالب فإن التغير العكسى يكون طرديا و التغير الطردى يكون عكسيا وذلك فى مفهوم الزيادة و النقص

مثال ١

إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٤٨ عندما س = ١٢ أوجد :
(١) العلاقة بين س ، ص
(٢) قيمة ص عندما س = ٨
(٣) قيمة س عندما ص = ٨٠

الحل

ص ∝ س $\boxed{ص = م س}$

ولكن ص = ٤٨ عند س = ١٢

∴ بالتعويض عن قيمتى ص ، س فى العلاقة السابقة لإيجاد قيمة م

٤٨ = م × ١٢ ⟸ م = $\frac{٤٨}{١٢}$ = ٤ م = ٤

العلاقة بين س ، ص هى $\boxed{ص = ٤ س}$

<u>(١) عندما س = ٨</u>

ص = ٤ س = ٤ × ٨ = ٣٢

<u>(٢) عندما ص = ٤٨</u>

٤٨ = ٤ س ⟸ س = $\frac{٤٨}{٤}$ = ١٢

مثال ٢

إذا كانت ص ∝ (س + ١) وكانت ص = ٢ عندما س = ٣ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة س عند س = ٦

الحل

ص ∝ (س + ١) ⟸ ص = م (س + ١)

<u>نوجد قيمة م</u>

وذلك بالتعويض عن قيمة س و ص المناظرة لها

ص = ٢ عند س = ٣ ٢ = م (٣ + ١)

٢ = م × ٤ ⟸ م = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ (س + ١)

قيمة ص عند س = ٦

....

....

مثال ٣

إذا كانت ص = ﺃ + ب حيث ﺃ ثابت ب ∝ س ، وكانت ص = ٧ عند س = ٢ ، ص = ١٦ عندما س = ٥ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٨

الحل

ص = ﺃ + ب ولكن ب ∝ س ⟸ ب = م س

$\boxed{ص = ﺃ + م س}$

بالتعويض عن قيم س وص المناظرة لها

<u>عند ص=٧ ، س=٢</u>

٧=ﺃ+م×٢ ٧ = ﺃ+٢م ــــ (١)

<u>عند ص=١٦ ، س=٥</u>

١٦= ﺃ +م×٥ ١٦= ﺃ+٥م ــ (٢)

وبطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نجد أن :

$١٦ = \text{أ} + ٥\text{م}$

$٧ = \text{أ} + ٢\text{م}$

$٩ = ٣\text{م}$ $\text{م} = \frac{٩}{٣} = ٣$ $\text{م} = ٣$

بالتعويض عن قيمة م فى المعادلة (٢) لإيجاد أ

$١٦ = \text{أ} + ٥\text{م}$ $١٦ = \text{أ} + ٥ \times ٣$ $١٦ = \text{أ} + ١٥$

$\text{أ} = ١٦ - ١٥ = ١$ $\text{أ} = ١$

بالتعويض عن قيمة أ ، م فى العلاقة نجد أن :

$\boxed{\text{ص} = ١ + ٣\text{س}}$

قيمة س عند ص = ٨

$\text{ص} = ١ + ٣\text{س}$ $٨ = ١ + ٣\text{س}$

$٣\text{س} = ٨ - ١ = ٧$ $\text{س} = \frac{٧}{٣}$

مثال ٤

إذا كانت $\text{ص} \propto \sqrt[٣]{\text{س}}$

وكانت ص $= \frac{٢}{٣}$ ، س = ٨ أوجد قيمة س عند ص = ١

الحل

هنا لم يطلب العلاقة بين س ، ص لذا فلا داعى لإيجاد العلاقة بين س ، ص ولكن

$\because \text{ص} \propto \sqrt[٣]{\text{س}}$ $\therefore \frac{\text{ص}_١}{\text{ص}_٢} = \frac{\sqrt[٣]{\text{س}_١}}{\sqrt[٣]{\text{س}_٢}}$

$\text{ص}_١ = \frac{٢}{٣}$ $\text{س}_١ = ٨$

$\text{ص}_٢ = ١$ $\text{س}_٢ = \text{س}$

$\frac{(\frac{٢}{٣})}{١} = \frac{\sqrt[٣]{٨}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ $\sqrt[٣]{\text{س}} = \frac{١ \times \sqrt[٣]{٨}}{(\frac{٢}{٣})} = \frac{٢}{(\frac{٢}{٣})} = ٣$

$\therefore \sqrt[٣]{\text{س}} = ٣$ وبتكعيب الطرفين

$(\sqrt[٣]{\text{س}})^٣ = ٣^٣$

$\therefore \text{س} = ٢٧$

مثال ٥

إذا كانت $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$ وكان

س = ٦ عندما ص = ١٢ أوجد

١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة س عندما ص = ٤

٣) قيمة ص عندما س = ٨

الحل

$\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \text{م} \times \frac{١}{\text{س}}}$

عند س = ٦   ص = ١٢

وبالتعويض فى العلاقة السابقة لإيجاد م

$١٢ = \text{م} \times \frac{١}{٦}$ $\text{م} = ١٢ \times ٦ = ٧٢$ فتكون العلاقة

$\text{ص} = ٧٢ \times \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \frac{٧٢}{\text{س}}}$ هـ ,ط,أولا

ii) عند ص = ٤ فإن :

$٤ = \frac{٧٢}{\text{س}} \Leftarrow \text{س} = \frac{٧٢}{٤} = ١٨$

iii) عند س = ٨ فإن :

....

....

حل أخر

$\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{ص} \times \text{س} = \text{م}$

عند س = ٦   ص = ١٢

$١٢ \times ٦ = \text{م}$ $\text{م} = ٧٢ \Leftarrow \text{ص} \times \text{س} = ٧٢$

$\boxed{\text{ص} \times \text{س} = ٧٢}$

ii) عند ص = ٤ فإن :

$٤ \times \text{س} = ٧٢ \Leftarrow \text{س} = \frac{٧٢}{٤} = ١٨$

iii) عند س = ٨ فإن :

....

....

مثال ٦

إذا كانت ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ وكان وكانت ص = ٣ عند س=٢ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عند س = $\frac{٣}{٢}$

الحل

ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ ⟸ ص = م × $\frac{١}{س}$

عند ص = ٣ ، س = ٢

٣ = م × $\frac{١}{٢}$ ⟸ م = ٣ × ٢ = ٦ م = ٦

ص = ٦ × $\frac{١}{س}$ = $\frac{٦}{س}$ $\boxed{ص = \frac{٦}{س}}$

$\boxed{\text{قيمة ص عند س} = \frac{٣}{٢}}$

ص = $\frac{٦}{س}$ = $\frac{٦}{(\frac{٣}{٢})}$ = ٦× $\frac{٢}{٣}$ = ٤

حل أخر

ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ ⟸ ص × س = م

عند ص = ٣ ، س = ٢ ⟸ ٣ × ٢ = م = ٦

العلاقة بين س ، ص $\boxed{ص × س = ٦}$

$\boxed{\text{قيمة ص عند س} = \frac{٣}{٢}}$

ص × $\frac{٣}{٢}$ = ٦ ص = ٦ × $\frac{٢}{٣}$ = ٤

تدريب ١

إذا كانت ص $\propto$ س وكانت س = ١٠ عندما ص=٢ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٢

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٢

إذا كانت ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٥ عندما س = ٤ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٢

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال ٧

إذا كانت العلاقة بين فرق الجهد بين طرفى موصل (ف) وشدة التيار الكهربي المار به هي ف=٢,٥ت حيث ف بالفولت ، ت بالأمبير

١) حدد نوع العلاقة بينهما

٢) أوجد قيمة فرق الجهد عندما يكون التيار ٦أمبير

٣) أوجد شدة التيار عندما يكون فرق الجهد ١٢٠ فولت

الحل

١) ف = ٢,٥ ت ف = ثابت × ت

فرق الجهد يتناسب طرديا مع شدة التيار

(٢) ف = ؟ ، ت = ٦ أمبير

ف = ٢,٥ ت = ٢,٥ × ٦ = ١٥ فولت

(٣) ف = ١٢٠ فولت ، ت = ؟

ف = ٢,٥ ت ١٢٠ = $\frac{٥}{٢}$ × ت ت = ١٢٠ × $\frac{٢}{٥}$ = ٤٨

مثال ٨

إذا كان حجم غاز يتناسب عكسيا مع ضغطه وكان حجم الغاز ٤سم^3 عندما كان ضغطه ١٢ بار اوجد ضغط الغاز إذا زاد الحجم إلى ٦سم^3

الحل

نفرض أن ضغط الغاز ض وحجمه ح

ض ∝ $\frac{١}{ح}$ ⟸ ض × ح = م ولكن

ض = ١٢ بار عندما ح = ٤سم^3

١٢ × ٤ = م ⟸ م = ٤٨

العلاقة تكون ض × ح = ٤٨

قيمة الضغط عند ح = ٦سم^3

ض × ح = ٤٨ ض × ٦ = ٤٨

ض = $\frac{٤٨}{٦}$ = ٨ بار

حل أخر

ض ∝ $\frac{١}{ح}$ ⟸ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{ح_٢}{ح_١}$ ⟸ $\frac{١٢}{ص} = \frac{٦}{٤}$

ص = $\frac{١٢×٤}{٦}$ = ٨

مثال ٩

إذا كان وزن جسم على القمر و يتناسب طرديا مع وزنه على الأرض ر وإذا كان جسم يزن ٨٤ كجم على الأرض ويزن ١٤ كجم على القمر أوجد وزن جسم ما وزنه على الأرض ١٤٤ كجم

الحل

وزن الجسم على القمر و وزنه على الأرض ر

و ∝ ر ⟸ و = م × ر

ولكن و = ١٤ كجم عندما ر = ٨٤كجم

١٤ = م × ٨٤ ⟸ م = $\frac{١٤}{٨٤} = \frac{١}{٦}$

تصبح العلاقة بين و ، ر هى :

و = $\frac{١}{٦}$ ر

وزن جسم على القمر إذا كان يزن على الأرض ١٤٤ كجم

ر = ١٤٤ و = $\frac{١}{٦}$ × ١٤٤ = ٢٤ كجم

حل أخر

و ∝ ر ⟸ $\frac{و_١}{و_٢} = \frac{ر_١}{ر_٢}$ ⟸ $\frac{١٤}{و} = \frac{٨٤}{١٤٤}$

و = $\frac{١٤٤×١٤}{٨٤}$ = ٢٤ كجم

تدريب ٣

إذا كانت مقاومة موصل = ١٠ أوم وشدة التيار المار فيه = ٦ أمبير أوجد العلاقة بين شدة التيار والمقاومة الكهربية ثم أوجد المقاومة الكهربية عندما يكون التيار ٨أمبير وذلك إذا كانت المقاومة تتناسب مع التيار عكسيا

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....